



**FACULTAD DE INGENIERÍA Y COMPUTACIÓN**

**Escuela Profesional de Ingeniería Civil**

**ANÁLISIS DE LA RELACIÓN DE LA  
DUCTILIDAD CON LA CUANTÍA DE  
REFUERZO A TRACCIÓN EN SECCIONES DE  
CONCRETO NO CONFINADO SOMETIDAS A  
FLEXIÓN PURA**

**Presentado por el Egresado:**

**JORGE ARTURO YATO VILLENA**

**Para optar por el grado académico de Bachiller en:**

**INGENIERÍA CIVIL**

**Asesor: PhD. ENRIQUE GERARDO SIMBORT ZEBALLOS**

**Arequipa, agosto del 2019**

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por bendecirme y permitirme cumplir una de mis metas.

A mis padres Jorge y Elvira quienes a través de sus enseñanzas me han permitido cumplir hoy uno de mis sueños, gracias por inculcar en mí que con esfuerzo y valentía se puede superar todos aquellos retos que se presenten.

A mi hermano Gonzalo por su apoyo incondicional durante todo este tiempo y por mostrarme que a través de la perseverancia todo se puede lograr.

Al Doctor Enrique Simbort por el tiempo y la paciencia dedicada al realizar el presente trabajo de investigación, ya que sin su guía no habría sido posible realizar el presente trabajo de investigación.

A Karen Hanco, por apoyarme durante este proceso y por mostrarme que con dedicación y esfuerzo se pueden lograr grandes cosas.

## **DEDICATORIA**

El presente trabajo de investigación está dedicado a mis padres Jorge y Elvira, quienes dedicaron parte de su vida para criarme, educarme y guiarme.

Quiero que sepan que este logro, es tanto mío como suyo, muchas gracias por su compañía y apoyo a lo largo de mi vida.

## RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo fundamental analizar y establecer la relación de la ductilidad con la cuantía de refuerzo a tracción en secciones de concreto no confinado sometidas a flexión pura.

A través del análisis de la relación momento-curvatura en secciones de concreto armado se busca obtener el valor de ductilidad correspondiente a una cuantía de refuerzo longitudinal a tracción. Para lograr este propósito se optó por trabajar con cuantías de acero de refuerzo longitudinal a tracción establecidas de acuerdo a la condición de falla balanceada de cada sección a ser analizada.

Además, para cada caso evaluado se propuso la variación de la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, observando de esta manera que conforme se incrementa esta característica de resistencia se incrementa la ductilidad de la sección también lo hace. Sin embargo, este incremento de ductilidad es notorio cuando se trabaja con cuantías de refuerzo longitudinal a tracción que no se encuentran sujetas a la condición de falla balanceada.

En el caso en el que la cuantía de refuerzo longitudinal a tracción se encuentra sujeta a la condición de falla balanceada de la sección, así se incrementa la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, los valores de ductilidad obtenidos en la sección serán los mismos.

De esta manera se elimina la creencia de que al incrementar la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto se mejora el desempeño de una sección de concreto armado, ya que esta condición no se cumple en todos los casos.

**Palabras clave:** Ductilidad, Relación momento-curvatura, cuantía de refuerzo longitudinal a tracción, concreto no confinado, resistencia a la compresión cilíndrica del concreto.

## ABSTRACT

The purpose of this research is to analyze and establish the ratio between ductility and the quantity of tensile reinforcement in sections of unconfined concrete subjected to pure bending.

The analysis of the moment-curvature relationship in reinforced concrete sections allows to know the ductility corresponding to a quantity of longitudinal tensile reinforcement. In fact, it was decided to work with quantities of longitudinal tensile reinforcement steel established according to balanced failure of the section.

In addition, the variation of the cylindrical compressive strength of concrete was proposed, by the way, as this strength characteristic is increased, the ductility of the section is increased as well. However, this ductility increase is noticeable when working with quantities of longitudinal tensile reinforcement that aren't subject to balanced failure.

In the case where the quantity of longitudinal tensile reinforcement is subject to balanced failure of the section, thus increasing the cylindrical compressive strength of concrete, the ductility obtained in the section will be the same.

This result eliminates the belief that increasing the cylindrical compressive strength of concrete improves the performance of a section of reinforced concrete because this condition isn't the same in all cases.

**Keywords:** Ductility, moment-curvature relationship, quantity of longitudinal tensile reinforcement, unconfined concrete, cylindrical compressive strength of concrete.

## INTRODUCCIÓN

Hoy en día el diseño sismorresistente se encuentra respaldado por una filosofía de diseño que propone el uso del recurso inelástico de las estructuras, es decir que ante acciones sísmicas una estructura pueda disipar energía a través de la deformación de sus elementos sin perder estabilidad. Es por esta razón que la norma de diseño sismorresistente RNE E.030 propone que durante la etapa de diseño de una estructura se considere a la ductilidad como uno de los aspectos más importantes, ya que esta permite a la estructura alcanzar deformaciones inelásticas.

Por otra parte, durante la etapa de diseño de secciones de concreto armado muchas normativas establecen parámetros mínimos o máximos de la cuantía de refuerzo longitudinal a tracción en función porcentajes de cuantía por falla en condición balanceada, sin embargo, no se toma en cuenta las características de ductilidad que puedan generar el cambio de la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, o la variación de la cuantía de refuerzo a tracción.

Analizar y establecer la relación de la ductilidad con la cuantía de refuerzo a tracción en secciones de concreto no confinado sometidas a flexión pura, es la premisa fundamental de la presente investigación, ya que conocer esta relación permitirá identificar la ductilidad y el comportamiento de secciones de concreto simplemente y doblemente reforzadas en función de la cuantía de refuerzo a tracción y la variación de la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto.

Además, se propone reconocer todas estas características a través de la relación momento-curvatura la cual permite observar tres etapas importantes del comportamiento de elementos de concreto armado sometidos a flexión pura. En la primera etapa se analiza una sección de concreto armado justo en el momento en el que la fibra extrema inferior comienza a

agrietarse. En la segunda etapa que es lo que sucede cuando la fibra de acero de refuerzo a tracción alcanza la resistencia de fluencia. Finalmente, en la ultima etapa se analiza lo que sucede cuando la fibra extrema superior alcanza la deformación máxima a compresión del concreto.

De esta manera al estudiar las tres etapas del comportamiento de elementos de concreto armado sometidos a flexión pura se podrá identificar los parámetros necesarios para conocer la ductilidad de una sección simplemente y doblemente reforzada. Siendo esta ultima la característica mas importante a ser evaluada en la presente investigación.

## INDICE

<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>ii</b>
<b>RESUMEN.....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>v</b>
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>vi</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>x</b>
<b>LISTA DE TABLAS .....</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE SIMBOLOS.....</b>	<b>xiv</b>
<b>1. ANTECEDENTES.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2. JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>2</b>
<b>1.3. HIPOTESIS DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>3</b>
<b>1.4. OBJETIVOS .....</b>	<b>4</b>
<b>1.4.1. OBJETIVO GENERAL .....</b>	<b>4</b>
<b>1.4.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS .....</b>	<b>5</b>
<b>1.5. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>5</b>
<b>2. ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>7</b>
<b>3. DUCTILIDAD DE SECCIÓN.....</b>	<b>12</b>
<b>3.1. DUCTILIDAD DEL MATERIAL.....</b>	<b>13</b>
<b>3.2. MOMENTO CURVATURA .....</b>	<b>19</b>



3.2.1.	DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA PARA UNA SECCIÓN DE CONCRETO ARMADO SIMPLEMENTE REFORZADA .....	20
3.2.2.	DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA PARA UNA SECCIÓN DE CONCRETO ARMADO DOBLEMENTE REFORZADA.....	39
4.	ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	55
5.	CONCLUSIONES .....	57
6.	BIBLIOGRAFÍA .....	59

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Tipos de ductilidad en una estructura (Gioncu & Mazzolani, 2002, pág. 16).....	14
Figura 3.2: Curva esfuerzo vs deformación del concreto de resistencia $f'_c=175, 210, 280$ y $350 \text{ kgf/cm}^2$ . ....	17
Figura 3.3: Curva esfuerzo vs deformación del acero de refuerzo $f_y=4200 \text{ kgf/cm}^2$ . ....	18
Figura 3.4: Distribución de deformaciones y curvatura de una sección (Park & Paulay, 1983, pág. 203). ....	19
Figura 3.5: Tramo de elemento flexionado (Park & Paulay, 1983, pág. 203). ....	19
Figura 3.6: Dimensiones de la sección simplemente armada estudiada. ....	21
Figura 3.7: Representación gráfica de la falla balanceada de una sección simplemente reforzada. ....	22
Figura 3.8: Representación gráfica de la condición de agrietamiento de una sección simplemente reforzada. ....	25
Figura 3.9: Representación gráfica de la condición de fluencia de una sección simplemente reforzada. ....	27
Figura 3.10: Representación gráfica de la condición de fluencia cuando el concreto presenta un comportamiento elasto-plástico en una sección simplemente reforzada. ....	29
Figura 3.11: Representación gráfica de la condición última o de agotamiento de una sección simplemente reforzada. ....	31
Figura 3.12: Momento vs curvatura, análisis en función a porcentajes de la cuantía balanceada. ....	33
Figura 3.13: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes de la cuantía balanceada. ....	34
Figura 3.14: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes del 0.75 de la cuantía balanceada. ....	35

Figura 3.15: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes del 0.5 de la cuantía balanceada.....	36
Figura 3.16: Representación gráfica de la falla controlado por tracción de una sección simplemente reforzada. ....	36
Figura 3.17: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes de la cuantía a falla controlado por tracción ( $f_t=0.004$ ). ....	38
Figura 3.18: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes de la cuantía a falla controlado por tracción ( $f_t=0.005$ ). ....	38
Figura 3.19: Representación gráfica de la falla balanceada de una sección doblemente reforzada. ....	39
Figura 3.20: Representación gráfica de la condición de agrietamiento de una sección doblemente reforzada. ....	42
Figura 3.21: Representación gráfica de la condición de fluencia de una sección doblemente reforzada. ....	43
Figura 3.22: Representación gráfica de la condición de fluencia cuando el concreto presenta un comportamiento elasto-plástico en una sección doblemente reforzada. ....	46
Figura 3.23: Representación gráfica de la condición de ultima o de agotamiento de una sección doblemente reforzada. ....	48
Figura 3.24: Momento vs curvatura, análisis en función a porcentajes de la cuantía de acero de refuerzo balanceada. ....	51
Figura 3.25: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función de porcentajes de la cuantía balanceada, con acero de refuerzo a compresión igual al 50% del acero de refuerzo a tracción. ....	52

Figura 3.26: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función de porcentajes de la cuantía balanceada, con acero de refuerzo a compresión igual al 25% del acero de refuerzo a tracción. ....53

Figura 3.27: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función de porcentajes de la cuantía balanceada, con acero de refuerzo a compresión igual al 75% del acero de refuerzo a tracción .....54

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1: Variables de la investigación.....	4
Tabla 3.1: Valores del parámetro $k_3$ obtenidos a través de pruebas PCA (Park & Paulay, 1983, pág. 55). .....	15
Tabla 3.2: Momento y curvatura en condición de agrietamiento de una sección simplemente reforzada. ....	26
Tabla 3.3: Momento y curvatura en condición de fluencia de una sección simplemente reforzada. ....	31
Tabla 3.4: Momento y curvatura en condición última de una sección simplemente reforzada. ....	32
Tabla 3.5: Ductilidad para cada área de refuerzo propuesta en 3.41. ....	34
Tabla 3.6: Cuantía de refuerzo a tracción en condición de falla balanceada, Acero de refuerzo en tensión, Acero de refuerzo en compresión. ....	41
Tabla 3.7: Momento y curvatura en condición de agrietamiento de una sección doblemente reforzada. ....	43
Tabla 3.8: Momento y curvatura en condición de fluencia de una sección doblemente reforzada. ....	48
Tabla 3.9: Momento y curvatura en condición última de una sección doblemente reforzada. ....	50
Tabla 3.10: Ductilidad para cada área de acero propuesta para el caso 1 en la tabla 3.6. ....	51

## LISTA DE SIMBOLOS

<b>a</b>	Altura del bloque de compresión corregido
<b>A</b>	Variable de la ecuación general de segundo grado
<b>A<sub>s</sub></b>	Área de acero de refuerzo a tracción
<b>A'<sub>s</sub></b>	Área de acero de refuerzo a compresión
<b>A<sub>sb</sub></b>	Área de acero para la falla balanceada
<b>A<sub>se</sub></b>	Área de acero de la sección equivalente
<b>b</b>	Ancho de viga
<b>B</b>	Variable de la ecuación general de segundo grado
<b>c</b>	Profundidad del eje neutro para la falla balanceada
<b>c<sub>b</sub></b>	Altura del bloque a compresión en falla balanceada
<b>C</b>	Fuerza a compresión del concreto
<b>C<sub>1</sub></b>	Compresión resultante en zona rectangular
<b>C<sub>2</sub></b>	Compresión en zona triangular
<b>C<sub>c</sub></b>	Fuerza a compresión del concreto en sección doblemente armada
<b>C<sub>s</sub></b>	Fuerza a compresión del acero en sección doblemente armada
<b>d</b>	Altura efectiva de viga
<b>d'</b>	Recubrimiento superior de la viga
<b>D</b>	Variable de la ecuación general de segundo grado
<b>E.N.</b>	Eje neutro
<b>f<sub>c</sub></b>	Esfuerzo de compresión del concreto
<b>f<sub>c_Límite</sub></b>	Esfuerzo límite de comportamiento elástico del concreto
<b>f'<sub>c</sub></b>	Resistencia a la compresión cilíndrica del concreto
<b>f<sub>r</sub></b>	Módulo de rotura

$f_s$	Resistencia a la tracción del acero
$f'_s$	Resistencia a la compresión del acero
$f_t$	Deformación del acero en condición de falla a tracción
$f_y$	Esfuerzo de tracción del acero
$E_c$	Módulo de elasticidad del concreto
$E_s$	Módulo de elasticidad del acero
$h$	Altura de viga
$I_{SE}$	Inercia de la sección equivalente respecto al eje neutro
$n$	Relación de módulos de elasticidad
$N$	Constante de proporción que relaciona el acero de refuerzo a tracción con el acero a compresión
$m$	Porción del bloque de compresión del concreto que se mantiene en un intervalo elástico
$M$	Momentos en el eje neutro
$M_A$	Momento de agrietamiento
$M_y$	Momento cedente
$M_u$	Momento último
$r$	Recubrimiento
$T$	Fuerza a tracción del acero inferior
$\beta$	Coefficiente de reducción
$\epsilon_c$	Deformación del concreto
$\epsilon_{cy}$	Deformación del concreto al alcanzar el comportamiento inelástico
$\epsilon_{cu}$	Deformación última del concreto
$\epsilon_s$	Deformación del acero de refuerzo a tracción
$\epsilon'_s$	Deformación del acero de refuerzo a compresión

$\varepsilon_y$	Deformación cedente de acero de refuerzo a tracción
$\rho$	Cuantía de acero a tracción
$\rho_b$	Cuantía de acero balanceada
$\phi_A$	Curvatura de agrietamiento
$\phi_y$	Curvatura cedente
$\phi_u$	Curvatura última
$\mu$	Ductilidad de la sección



## **1. ANTECEDENTES**

### **1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En la norma de diseño sismorresistente de cualquier país y en particular en la norma RNE E.030 se propone un tipo de cálculo que utiliza el recurso plástico de las estructuras, es decir que se plantea un diseño sismorresistente que reduce o escala la fuerza sísmica aplicada sobre la estructura, llevando a esta última de un intervalo elástico a un intervalo inelástico. De esta manera se reducen y optimizan las dimensiones de la estructura y se desarrolla una mejor arquitectura.

Este tipo de diseño sismorresistente se respalda en la filosofía de un diseño inelástico, que produce una deformación máxima similar o menor a la deformación máxima producida por un análisis elástico. Por otro lado, este diseño inelástico debe garantizar que la estructura no colapse o pierda estabilidad antes de alcanzar esta deformación máxima, en vista de esto la estructura podrá presentar daños estructurales leves o moderados.

Sin embargo, el factor de reducción de fuerza sísmica  $R$  que permite cumplir con los parámetros antes establecidos se ve muy relacionado a características propias de la estructura, del sismo, del suelo y de los procesos y técnicas constructivas.

En contra posición, la norma de diseño sismorresistente no considera estas características para determinar el factor de reducción de fuerza sísmica  $R$  si no que establece parámetros más generales como:

- Tipo de sistema estructural.
- Tipo de material.
- Tipo de suelo relacionado con el espectro.
- Irregularidades en planta.
- Irregularidades en altura.

Obteniendo así un factor de reducción de fuerza sísmica  $R$  que no se encuentra relacionado con las características propias de la estructura. Es decir que frente a un sismo la estructura se comporta de modo totalmente distinto al esperado según la norma de diseño sismorresistente. De esta manera, es que no se garantiza el cumplimiento de la filosofía y los principios del diseño sismorresistente establecidos en la norma RNE E.030.

## **1.2. JUSTIFICATIVA**

El diseño sismo-resistente convencional establecido por la norma E.030 basa su aplicación en los siguientes parámetros:

- Bajo sismos con intensidades bajas o moderadas iguales al sismo de diseño con un periodo de retorno de 50 años, la estructura no debe presentar ningún tipo de daño estructural y salvaguardar la vida de sus habitantes, es decir que los elementos estructurales que la componen no deben presentar daños localizados. Sin embargo, se permite que existan daños no estructurales como la fisuración de particiones y elementos de cerramiento.
- Bajo un sismo con intensidades altas, con periodo de retorno 475 años, la estructura debe disipar la energía provocada por el mismo. Con este fin la estructura debe sufrir grandes daños localizados que garanticen su estabilidad y permitan la evacuación total de sus habitantes.

Cumplir con los requisitos del ultimo parámetro resulta sumamente complicado porque los cálculos no dependen únicamente de la geometría o ubicación de la estructura si no que a su vez dependen de otros factores como:

- Comportamiento dinámico de los materiales, comportamiento histeretico.
- Comportamiento inelástico de la estructura.

- Periodo fundamental de la estructura, el cual se ve extendido cuando la estructura se plastifica.
- Periodo predominante del sismo.
- Contenido espectral del sismo.
- Duración del sismo.
- Procesos y técnicas constructivas.

Es por eso que la norma de diseño sismo-resistente no satisface las solicitaciones sísmicas de los distintos tipos de estructuras, ya que la aplicación del factor de reducción no solo debe verse relacionada con la fuerza sísmica de diseño o cortante basal, sino que también con la capacidad de disipación de energía que posea la estructura asociada a la naturaleza de la misma. Es decir que en algunos casos la norma establece un factor de reducción que estima un comportamiento sísmico de la estructura, pero al momento de ocurrir el sismo esta se comporta de manera distinta provocando daños que no garantizan lo establecido por los parámetros de aplicación de la norma.

### **1.3. HIPOTESIS DE LA INVESTIGACIÓN**

A través de análisis estructurales como el análisis dinámico tiempo-historia sobre un macro modelo estructural de concreto armado se pretende determinar la relación existente entre el factor de reducción sísmica y parámetros propios de la estructura como son sus características dinámicas (Periodo de vibración, etc.), características geométricas, características mecánicas (Ductilidad de la estructura, ductilidad de sus elementos), etc.

Por otro lado, a través de los métodos de análisis antes propuestos se buscará identificar las generalidades existentes en cuanto a los valores planteados por la norma de diseño sismorresistente peruana para estructuras de concreto armado.

De esta manera se planteará una metodología que garantice el cumplimiento de la filosofía de diseño de la norma de diseño sismorresistente (E.030).

*Tabla 1.1: Variables de la investigación.*

<b>Variables Independientes</b>	<b>Indicadores</b>	<b>Valor Final</b>	<b>Tipo de Variable</b>
Características dinámicas de la Estructura y sus componentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Periodo de Vibración.</li> <li>• Comportamiento dinámico de los materiales (concreto y acero).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• [s].</li> <li>• Diagrama de esfuerzo deformación (Lazos histereticos).</li> </ul>	Numérica continua
Características mecánicas de la Estructura y sus elementos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ductilidad de la estructura.</li> <li>• Ductilidad de sus elementos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• [1/m].</li> </ul>	Numérica continua
<b>Variables Dependientes</b>	<b>Indicadores</b>	<b>Valor Final</b>	<b>Tipo de Variable</b>
Factor de reducción	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coeficiente de reducción R.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• [Adimensional].</li> </ul>	Numérica continua

**Variable de estudio:** Factor de reducción de diseño sismorresistente.

## 1.4. OBJETIVOS

### 1.4.1. OBJETIVO GENERAL

Determinar y analizar la relación de la ductilidad con la cuantía de refuerzo a tracción en secciones de concreto no confinado sometidas a flexión pura.

#### **1.4.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS**

- Identificar modelos matemáticos del concreto armado (Concreto y acero de refuerzo).
- Determinar la relación entre una cuantía de refuerzo de acero y la ductilidad de sección en secciones de concreto armado simplemente reforzadas.
- Determinar la relación entre una cuantía de refuerzo de acero y la ductilidad de sección en secciones de concreto armado doblemente reforzadas.

#### **1.5. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN**

A través del presente trabajo de investigación se plantea alcanzar lo siguiente:

- Proponer una metodología de determinación del factor de reducción basado en el comportamiento dinámico de las estructuras. Esto a través del análisis de sistemas de uno o dos grados de libertad (Macro modelos estructurales).
- Determinación del factor de reducción  $R$  en base al tipo de sollicitación sísmica de la estructura (Pulso largo, pulso corto).
- Recomendaciones prácticas para el uso de valores de ductilidad de sección de elementos estructurales relacionadas con la ductilidad global de la estructura.
- Metodología para relacionar la ductilidad de la sección del elemento estructural con la ductilidad de la estructura.

#### **1.6. METODOLOGÍA**

El presente trabajo de investigación consistirá en realizar los siguientes procedimientos con el fin de determinar la relación que existe entre características dinámicas, mecánicas y estructurales de una edificación y el factor de reducción  $R$ .

- Identificación y caracterización del comportamiento dinámico del concreto armado a través de modelos histeréticos.
- Realización y validación de un modelo estructural de concreto armado.

- Análisis dinámico modal-espectral del modelo estructural de concreto armado basado en los parámetros establecidos por la norma de diseño sismorresistente peruana (RNE E.030).
- Diseño simplificado del modelo estructural de concreto armado basado en los resultados del análisis dinámico modal-espectral y en la norma E.060.
- Análisis dinámico tiempo-historia del modelo estructural de concreto armado basado en sismos reales ocurridos en el Perú a lo largo de su historia.
- Verificación, validación e interpretación de los resultados del análisis dinámico tiempo-historia, haciendo énfasis en el comportamiento histeretico en el intervalo elástico y inelásticos del concreto armado que compone el modelo estructural evaluado.
- Comparación entre los resultados del análisis dinámico modal-espectral y el análisis dinámico tiempo-historia.
- Comparación del comportamiento histeretico en el intervalo elástico y inelástico del concreto armado que componen cada uno de los modelos estructurales.
- Identificación de la relación que existe entre el factor de reducción  $R$  y las características dinámicas, mecánicas y estructurales de los modelos estructurales.
- Verificación y validación de las relaciones determinadas entre el factor de reducción  $R$  y las características dinámicas, mecánicas y estructurales a través de modelos estructurales simplificados.
- Verificación y validación de las relaciones obtenidas entre el factor de reducción  $R$  y las características dinámicas, mecánicas y estructurales a través de su aplicación en estructuras aporticadas de concreto armado existentes o proyectadas.

## **2. ESTADO DEL ARTE**

De acuerdo con la norma de diseño sismorresistente RNE E.030, la filosofía de diseño sismorresistente se encuentra respaldada por los siguientes puntos:

- Evitar cualquier pérdida humana.
- Garantizar la utilidad de estructuras de servicios básicos.
- Reducir daños estéticos y estructurales en los distintos tipos de edificaciones.

Sin embargo, la norma de diseño sismorresistente RNE E.030 reconoce que no es posible garantizar la resistencia de una estructura frente a todos los sismos máximos creíbles, esto debido a que los elementos estructurales se convertirían en elementos muy robustos provocando que la estructura sea económicamente inviable, frente a esta situación la norma RNE E.030 busca cumplir los siguientes principios:

- Conservar la estabilidad de la estructura a fin de garantizar la evacuación de todos sus habitantes. Esto quiere decir que frente a sismos de gran intensidad la estructura principal podrá presentar grandes daños, pero en ningún momento deberá colapsar. Por otra parte, frente a sismo de intensidad moderada, la estructura podrá presentar daños moderados reparables en la medida de lo posible.
- En caso de edificaciones de carácter esencial como son colegios, universidades, hospitales, etc. la norma RNE E.030 garantizará su operatividad después de presentarse un sismo de gran intensidad.

Para lograr todos estos propósitos la norma recomienda establecer una estructura correctamente distribuida, no solo al nivel de planta o piso, sino que también se debe contemplar la distribución en altura a fin de reducir posibles efectos de torsión, discontinuidad de elementos estructurales, generación de rotulas plásticas, etc.

Además, la norma RNE E.030 propone tomar en cuenta como un factor importante a la ductilidad de la estructura que será la propiedad que le permita trabajar en el intervalo inelástico, permitiendo tener mayores desplazamientos laterales sin perder estabilidad y colapsar.

De acuerdo con Mazzolani & Piluso (2004), una estructura debe ser diseñada de modo que esta disipe la energía de un sismo severo a través de deformaciones inelásticas. Sin embargo, estas deformaciones inelásticas deben ser limitadas a la ductilidad local y global de la estructura, así como a su capacidad de disipación de energía esto con el fin de prevenir el colapso de la estructura. En base a este concepto se establecen dos métodos principales para realizar el análisis estructural y obtener las fuerzas de diseño. El primer método consiste en el uso de un análisis dinámico no lineal respaldado en un análisis tiempo-historia, el cual determinara el desempeño de la estructura durante un evento sísmico histórico. Por otro lado, el segundo método de análisis estructural se encuentra en un intervalo lineal cuasi-estático, donde se asume un espectro de diseño que se encuentra relacionado con el periodo fundamental de la estructura y normalizado por una pseudo-aceleración que se rige en función de la respuesta inelástica de la estructura. Este espectro inelástico de diseño se obtiene de los códigos de diseño sismorresistente, aplicado un factor de reducción “ $q$ ” al espectro elástico de diseño. Cabe señalar que este factor de reducción “ $q$ ” toma en cuenta la capacidad de disipación de energía que posee la estructura.

Para aplicar el primer método de análisis estructural se debe trabajar con modelos precisos y sofisticados del comportamiento de los materiales, de los elementos estructurales y de la estructura en general. Por esta razón, este tipo de análisis estructural se ve limitado al uso de un programa computacional. Sin embargo, es recomendable su aplicación para la investigación y a la hora de diseñar una estructura que su colapso represente un riesgo para la población.



En la práctica profesional se suele utilizar el segundo método de análisis estructural ya que este se encuentra parametrizado por las normas de diseño sismorresistente. Sin embargo, es importante aclarar que el este método de análisis estructural se respalda en la suposición de que el diseñador debe verificar que la estructura que ha diseñado este dentro de los límites de servicialidad y se aleje del estado último de resistencia, mientras que la normativa debe garantizar que los valores que pueda asumir el factor de reducción “q” sean confiables y lleven a la estructura a un intervalo inelástico sin provocar el colapso.

Mazzolani & Piluso (2004), afirman que la determinación de este factor de reducción “q” se define como la relación entre la aceleración pico de colapso y una aceleración correspondiente al estado en el que la estructura comienza a incurrir en el intervalo inelástico. Determinar esta relación requiere de numerosos análisis estructurales considerando distintos tipos de movimiento del suelo, distintas configuraciones estructurales y casos específicos que con lleven a una situación real de diseño.

De acuerdo con lo afirmado por Mazzolani & Piluso (2004) la norma de diseño sismorresistente RNE E.030 propone realizar un análisis estructural lineal cuasi-estático basado en un espectro de diseño elástico el cual se ve reducido y amplificado por diversos factores como son el uso, los materiales, la geometría de la estructura y el tipo de suelo sobre el cual se encuentra ubicada.

Palazzo & Siano (1992) presenta una metodología racional para evaluar el factor de reducción de fuerza sísmica basado en la relación de la ductilidad de la estructura y los efectos de la relación de fuerza lateral y desplazamiento máximo de la estructura, tomando en cuenta el deterioro geométrico de la estructura. Además, define las condiciones de colapso teóricas para un sistema de varios grados de libertad sujeto a un análisis no lineal, que a su

vez se encuentra bajo un régimen de excitaciones simuladas de acuerdo a un espectro de diseño elástico lineal utilizado en un código de diseño sismorresistente.

Por otro lado, e (Moroni, Astroza, & Gómez, 1992)l autor realizo múltiples evaluaciones a fin de determinar la fuerza mínima ante la cual el diseño sismorresistente de la estructura garantice la estabilidad de la estructura después de ser sometida a un sismo severo. Como uno de los resultados finales el autor determino la relación entre el factor de reducción, la ductilidad, la geometría de la estructura y el periodo fundamental de la estructura.

Moroni, Astroza, & Gómez (1992), realizaron el trabajo de investigación titulado “Seismic force reduction factor for masonry building” o por su traducción en español “factor de reducción de fuerza sísmica para edificios de albañilería”, en el cual se analizó un una edificación de tres pisos de albañilería confinada sujeta a un sismo severo, observando y comprando el cortante basal de la estructural cuando se asume un comportamiento lineal y no lineal, de esta manera se propusieron desplazamientos máximos de entrepisos que garanticen resultados confiables.

Además, los autores identificaron que el factor de reducción “R” propuesto en la norma NCh 433.CR89 garantiza evitar el daño severo de la estructura después de ser sometida a un evento sísmico severo. Esto se logró a través de relacionar el factor de reducción de fuerza sísmica con el sistema estructura, el suelo y el periodo natural de la estructura.

Ruiz-Garcia & Miranda, (2003) a través de su investigación exponen un análisis estadístico del efecto de la degradación estructural de una edificación cimentada sobre un terreno firme sometida a un evento sísmico, demostrando que a través de los factores de reducción de resistencia por ductilidad “ $R_\mu$ ” se reducen las ordenadas del espectro lineal elástico de diseño sismorresistente generando un comportamiento inelástico en la estructura.

Para llevar a cabo su investigación lo autores establecieron modelos simplificados de un grado de libertad con comportamiento bilineal, los cuales en un inicio no exhibirán degradación estructural. A fin de generar degradación estructural en los modelos simplificados de un grado de libertad se aplicó el uso de modelos histeréticos de los materiales que componen a la estructura en estudio.

El sistema de un grado de libertad se sometió a un conjunto de análisis dinámicos tiempo-historia basados en 12 sismos históricos registrados en California, logrando establecer que, para una misma ductilidad, los factores de reducción " $R_\mu$ " son menores a los que se determinaron en el mismo modelo sin considerar degradación estructural. Por ello como conclusión final de la investigación se identificó que el factor de reducción " $R_\mu$ " debe ser distinto a la hora de diseñar estructuras que presenten degradación estructural, ya que estas necesitarán una mayor demanda de fuerza lateral que aquellas que no presentan degradación.

### 3. DUCTILIDAD DE SECCIÓN

De acuerdo con la norma de diseño sismorresistente RNE E.030, uno de los aspectos a tomar en cuenta al diseñar una estructura sismorresistente es la ductilidad, la cual se define como la capacidad de deformación de una estructura en el intervalo inelástico. (Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento; Construcción, Servicio Nacional de Capacitación para la Industria de la, 2018, pág. 6).

Con el propósito de cumplir lo establecido en la norma es necesario definir, analizar y comprender los conceptos de ductilidad que envuelven el comportamiento sismorresistente de una estructura y la relaciones entre los mismos.

Gioncu & Mazzolani (2002) afirma que el termino ductilidad es utilizado para evaluar el desempeño o comportamiento de una estructura en función de la cantidad de energía sísmica que es capaz de disipar a través de deformaciones plásticas. Esto se ve reflejado a su vez en la posibilidad de reducir la fuerza de diseño sismorresistente y establecer un control en las deformaciones provocadas por un sismo severo. (pág. 15). Es decir que a través del diseño sismorresistente convencional se busca direccionar el comportamiento de una estructura a un intervalo inelástico, en el cual la ductilidad permita mayores deformaciones sin perder estabilidad.

En este punto Gioncu & Mazzolani (2002) indica que existen cinco tipos de ductilidad en una estructura, las cuales se muestran en la figura 3.1 y se describen a continuación:

- **Ductilidad del material:** también llamada ductilidad de deformación, la cual enfoca la deformación plástica de los materiales ante el incremento o variación de algún tipo de carga. Por lo general este tipo de ductilidad se ve representada por un diagrama esfuerzo-deformación de cualquier material.

- **Ductilidad de la sección:** también conocido como ductilidad de curvatura, este tipo de ductilidad se centra en la deformación plástica de una sección del elemento estructural tomando en cuenta la interacción de los componentes de la misma. Por lo general este tipo de ductilidad se ve reflejada en el diagrama momento-curvatura de la sección de una viga, columna o cualquier elemento estructural.
- **Ductilidad de elemento:** también conocida como la curvatura de rotación de un elemento estructural, cabe señalar que dentro de este tipo de ductilidad se consideran las propiedades del elemento estructural. Este tipo de ductilidad se ve reflejada en el diagrama que relaciona el momento con la pendiente que este provoca en el elemento.
- **Ductilidad de la estructura:** También conocida como ductilidad de desplazamiento, este tipo de ductilidad considera el comportamiento general de la estructura y se ve representada por un diagrama fuerza-desplazamiento en cual muestra la deformación de la estructura para una fuerza lateral dada.
- **Ductilidad de energía:** Este tipo de ductilidad considera el nivel de disipación de energía sísmica que posee una estructura. Por otro lado, se ve representado por un diagrama que relaciona la energía disipada con el tiempo.

### 3.1. DUCTILIDAD DEL MATERIAL

Como se ha definido previamente la ductilidad del material se ve representada por la curva esfuerzo-deformación del material o materiales que se están evaluando. En la presente investigación se trabajará con estructuras de concreto armado, es decir que se definirán las curvas esfuerzo-deformación para el concreto y el acero de refuerzo.

Para la definición de la curva esfuerzo-deformación del concreto, se tomará como punto de partida el modelo de (Hognestad, 1951), el cual describe que la curva tendrá una tendencia parabólica hasta alcanzar su máximo esfuerzo a flexión ( $f''_c$ ), siendo este ultimo representado en función de la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto ( $f'_c$ ).

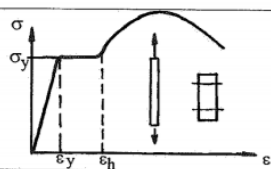
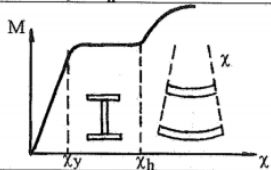
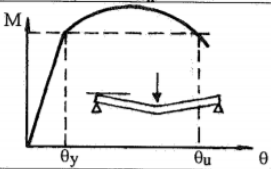
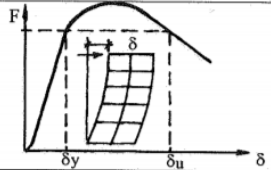
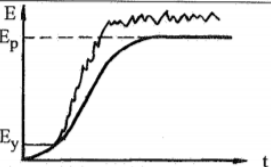
DUCTILITY TYPE	SCHEME	DEFINITION
<b>MATERIAL DUCTILITY</b> (deformation ductility)		$\mu_\epsilon = \frac{\epsilon_h - \epsilon_y}{\epsilon_y}$
<b>CROSS-SECTION DUCTILITY</b> (curvature ductility)		$\mu_\chi = \frac{\chi_h - \chi_y}{\chi_y}$
<b>MEMBER DUCTILITY</b> (rotation ductility)		$\mu_\theta = \frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_y}$
<b>STRUCTURE DUCTILITY</b> (displacement ductility, kinematic ductility)		$\mu_\delta = \frac{\delta_u - \delta_y}{\delta_y}$
<b>ENERGY DUCTILITY</b> (hysteretic ductility)		$\mu_E = \frac{E_p - E_y}{E_y}$

Figura 3.1: Tipos de ductilidad en una estructura (Gioncu & Mazzolani, 2002, pág. 16).

De acuerdo con Park & Paulay (1983), la relación entre el máximo esfuerzo a flexión del concreto y su resistencia a la compresión cilíndrica se formula de la siguiente manera:

$$f''_c := k_3 \cdot f'_c \quad (3.1)$$

Siendo  $k_3$  uno de los parámetros obtenidos a través de pruebas PCA, que definen el comportamiento del bloque de compresión en la resistencia última a flexión en secciones rectangulares de concreto armado no confinado. (Park & Paulay, 1983, pág. 55).

A partir de una resistencia a la compresión cilíndrica del concreto dada se modelará la curva esfuerzo-deformación a través de las ecuaciones dadas por Hognestad, (1951).

Tabla 3.1: Valores del parámetro  $k_3$  obtenidos a través de pruebas PCA (Park & Paulay, 1983, pág. 55).

$f'_c$			$k_3$	$f'_c$
(lb/in <sup>2</sup> )	(N/mm <sup>2</sup> )	(Kgf/cm <sup>2</sup> )		(Kgf/cm <sup>2</sup> )
2000	13.8	140.67	1.03	144.89
3000	20.7	211.01	0.97	204.68
4000	27.6	281.35	0.94	264.46
5000	34.5	351.68	0.92	323.55
6000	41.4	422.02	0.92	388.26
7000	48.3	492.35	0.93	457.89

Al definir la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto ( $f'_c$ ), se podrá determinar la resistencia máxima a flexión del concreto ( $f''_c$ ), el módulo de elasticidad del concreto ( $E_c$ ), la deformación asociada al esfuerzo maximo a flexión ( $\epsilon_0$ ) y algunos otros valores que permitan trazar la curva esfuerzo-deformación del concreto.

$$f'_c := 210 \frac{kgf}{cm^2} \quad (3.2)$$

De la tabla 3.1 se obtendrá el valor para  $k_3$  de acuerdo a la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto y se determinará la resistencia máxima a flexión del concreto.

$$k_3 := 0.97 \quad (3.3)$$

$$f''_c := k_3 \cdot f'_c = 203.7 \frac{kgf}{cm^2} \quad (3.4)$$

Seguidamente se determinará el módulo de elasticidad del concreto de acuerdo a la siguiente ecuación establecida en el modelo de Hognestad.

$$E_c := 1800000 \cdot psi + 460 \cdot f''_c \quad (3.5)$$

Reemplazando (3.4) en (3.5) se obtiene lo siguiente,

$$E_c = 220254.524 \frac{kgf}{cm^2} \quad (3.6)$$

Seguidamente se definirá la deformación asociada al máximo esfuerzo a flexión a través de la ecuación (3.7) y la deformación última del concreto, siendo esta última de 0.38%.

$$\varepsilon_0 := \frac{2 \cdot f''_c}{E_c} = 0.0018 \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{cu} := 0.0038 \quad (3.8)$$

Como se había mencionado previamente, el modelo de Hognestad define a la curva esfuerzo deformación a través de dos tramos, los cuales son representados a través de las siguientes ecuaciones, donde se utilizarán todos los datos antes obtenidos.

$$f_c(\varepsilon_c) = f''_c \cdot \left( \frac{2 \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad (3.9)$$

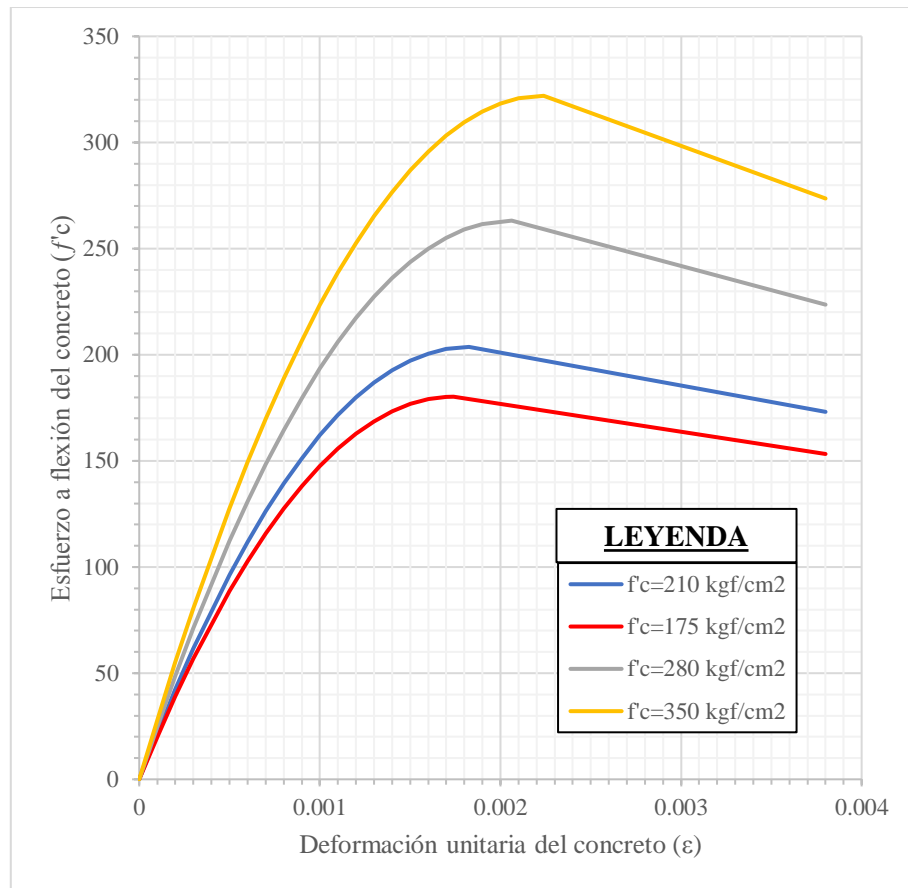
La función representada en la ecuación (3.9) se desarrollará desde 0 hasta alcanzar la deformación asociada al máximo esfuerzo a flexión para el concreto ( $\varepsilon_0$ ).

$$f_c(\varepsilon_c) = \frac{-0.15 \cdot f''_c}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_0) + f''_c \quad (3.10)$$

La función representada en la ecuación (3.10) se desarrollará desde la deformación asociada al máximo esfuerzo a flexión para el concreto ( $\varepsilon_0$ ) hasta alcanzar la deformación última del concreto ( $\varepsilon_{cu}$ ).

Al reemplazar (3.4), (3.7) y (3.8) en (3.9) y (3.10) se trazará la curva esfuerzo-deformación para un concreto de resistencia cilíndrica a la compresión de 210 kgf/cm<sup>2</sup> obteniendo la figura 3.2.





*Figura 3.2: Curva esfuerzo vs deformación del concreto de resistencia  $f'_c=175, 210, 280$  y  $350 \text{ kgf/cm}^2$ .*

Una vez definida la curva esfuerzo-deformación del concreto, se determinará la curva esfuerzo-deformación para el acero de refuerzo. De acuerdo con Park & Paulay (1983) la curva esfuerzo deformación del acero, puede representarse a través del modelo bilineal o elastoplástico ideal, el cual compone una curva de dos tramos, uno elástico y otro tramo infinitamente plástico. Para definir dichos tramos se utilizarán las siguientes ecuaciones:

$$f_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad (3.11)$$

$$f_s = f_y \quad (3.12)$$

Cabe señalar que la ecuación 3.11, se desarrollará en el intervalo  $[0 \dots \epsilon_y]$ , es decir que esta relación se desarrollara hasta que el acero comience a fluir. Por otro lado, la ecuación

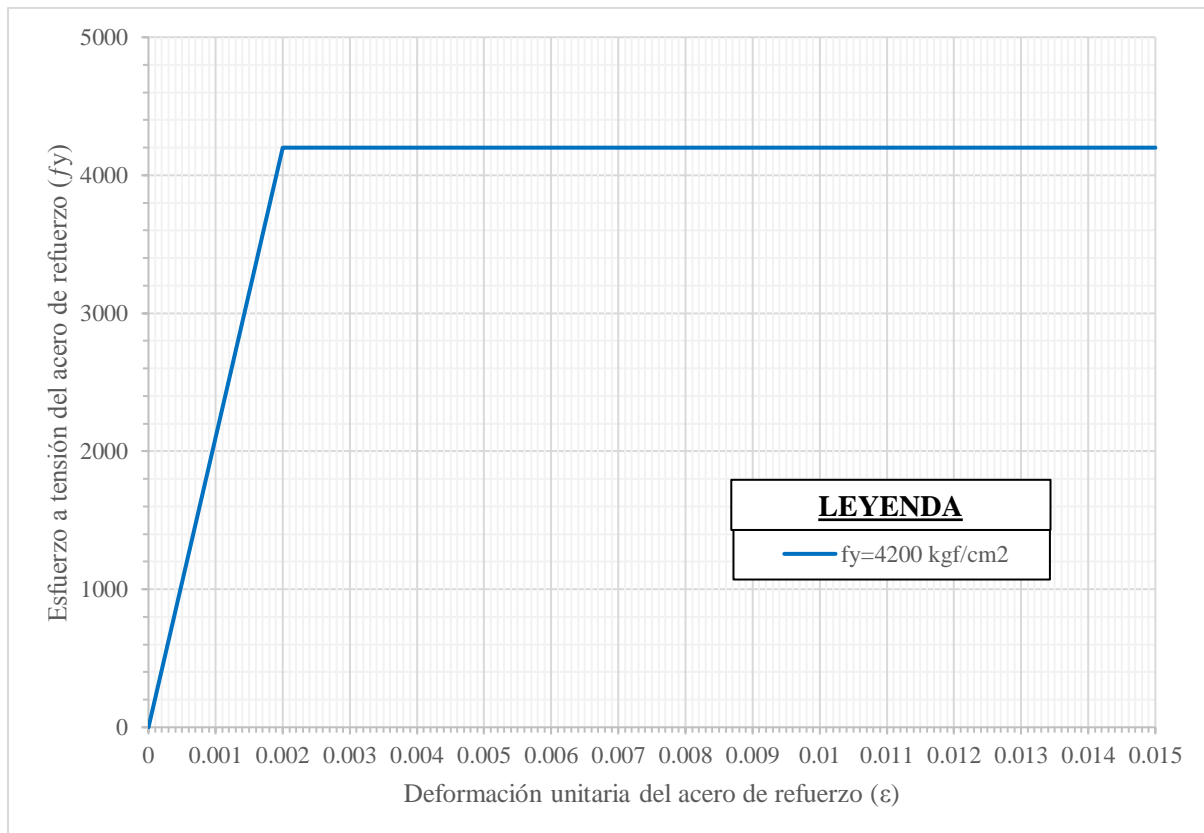
3.12, se desarrollará en el intervalo  $[\epsilon_y \dots \epsilon_{su}]$ , es decir desde que el acero ha comenzado a fluir hasta que este alcance su deformación unitaria máxima permitida. Finalmente, al sustituir las ecuaciones con sus respectivos intervalos, se obtendrá la curva mostrada en la figura 3.3, para los siguientes datos de esfuerzo de fluencia y módulo de elasticidad del acero de refuerzo.

$$f_y = 4200 \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad (3.13)$$

$$E_s = 2.1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad (3.14)$$

$$\epsilon_y = 0.002 \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{su} = 0.015 \quad (3.16)$$

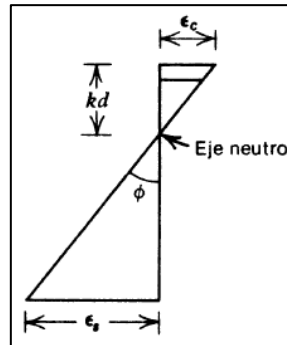


*Figura 3.3: Curva esfuerzo vs deformación del acero de refuerzo  $f_y=4200 \text{ kgf/cm}^2$ .*

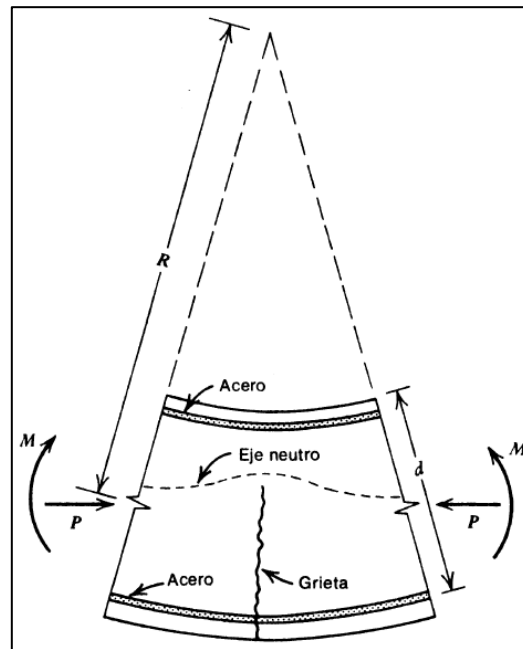
Cabe señalar que para la presente investigación se utilizara únicamente el modelo bilineal para representar la curva esfuerzo deformación del acero de refuerzo.

### 3.2. MOMENTO CURVATURA

Se define a la curvatura como el ángulo formado en el diagrama o distribución de deformaciones de una sección, como se muestra a continuación:



*Figura 3.4: Distribución de deformaciones y curvatura de una sección (Park & Paulay, 1983, pág. 203).*



*Figura 3.5: Tramo de elemento flexionado (Park & Paulay, 1983, pág. 203).*

Por otro lado, se puede definir a la curvatura a través de las siguientes ecuaciones, la cuales se respaldarán de lo planteado en la figura 3.4 y 3.5.

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{d(1-k)} \quad (3.17)$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{d(1-k)} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \quad (3.18)$$

Estas ecuaciones permiten generar relaciones sencillas para la obtención de la curvatura, ya que muestran la relación de las deformaciones, el peralte efectivo y la longitud al eje neutro con la curvatura y a través de relación de triángulos se obtienen dichas ecuaciones.

De acuerdo con Park & Paulay (1983), se define a la curvatura como el gradiente del diagrama de distribución de deformaciones como se muestra en la figura 3.4. Por otra parte, se relaciona a la curvatura de un elemento sometido a flexión con el momneto que genera, dicha flexión. Esto se logra a traves de la siguiente ecuación:

$$EI = MR = \frac{M}{\varphi} \quad (3.19)$$

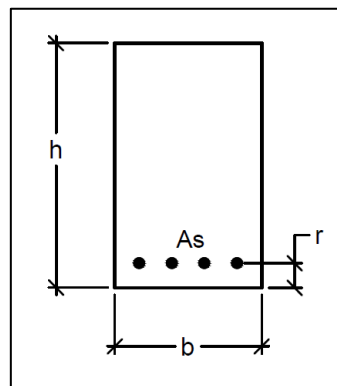
Con las ecuaciones antes observadas, se puede trazar la curva memento curvatura teórica para una sección de concreto armado, sin embargo, en la presente investigación se trazará dicha curva a través de tres puntos, los cuales representaran tres etapas importantes descritas durante la deflexión de un elemento, el agrietamiento de la sección, la fluencia del acero de refuerzo inferior y la falla a compresión de la fibra superior de concreto.

### **3.2.1. DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA PARA UNA SECCIÓN DE CONCRETO ARMADO SIMPLEMENTE REFORZADA**

Para comenzar con la determinación del diagrama momento curvatura de una sección simplemente reforzada, se tiene que definir las dimensiones de la sección de estudio, a fin de poder determinar la cuantía de reforzamiento en función de estas.

En la presente investigación se establecerá una relación de un peralte igual a 3 veces el ancho de la sección de estudio. Además, se sabe que el acero de refuerzo a utilizar es del tipo fierro corrugado ASTM A615 Grado 60, por lo cual se asumirá el esfuerzo de fluencia indicado en la ecuación 3.13. Cabe señalar que en la presente investigación se ha de trabajar con distintos tipos de concreto, esto acuerdo a la resistencia a la compresión cilíndrica de los mismos.

Como primer paso se asumirán las siguientes dimensiones, las cuales cumplirán con la relación antes descrita entre peralte y ancho de la sección a si mismo se asumirá un recubrimiento de 50 mm hasta el eje de la varilla de refuerzo.



*Figura 3.6: Dimensiones de la sección simplemente armada estudiada.*

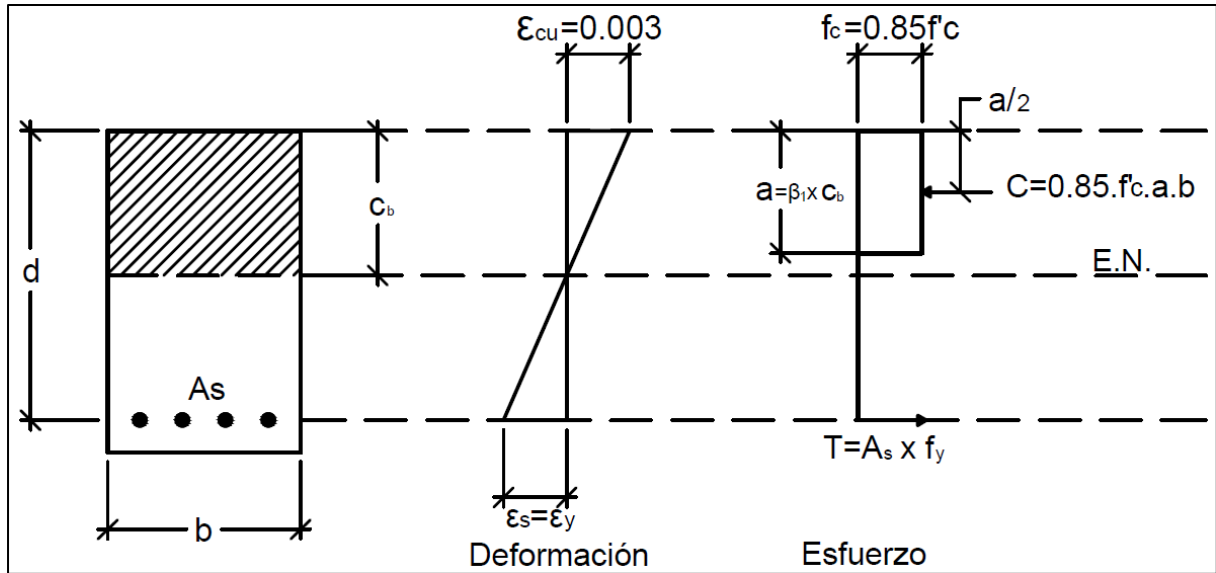
$$b := 40 \text{ cm} \quad (3.20)$$

$$h := 60 \text{ cm} \quad (3.21)$$

$$r := 5 \text{ cm} \quad (3.22)$$

$$d := h - r = 55 \text{ cm} \quad (3.23)$$

Seguidamente se determinará las cuantías de acero con las cuales se trabajará, para esto se observa la figura 3.7, como primer valor de cuantía de reforzamiento se obtendrá la cuantía por falla balanceada.



*Figura 3.7: Representación gráfica de la falla balanceada de una sección simplemente reforzada.*

De acuerdo a lo observado en la figura 3.7, se puede establecer la siguiente ecuación estableciendo una relación de triángulos, entre el diagrama de deformación y las dimensiones geométricas de la sección.

$$c_b = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_y + \varepsilon_{cu}} \quad (3.24)$$

De esta manera se ha determinado la altura del bloque de compresión del concreto, con la cual se podrá determinar el área de acero de refuerzo a través del siguiente proceso:

$$T = A_{sb} \cdot f_y \quad (3.25)$$

$$C = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c_b \cdot b \quad (3.26)$$

$$T = C \quad (3.27)$$

Reemplazando las expresiones 3.25 y 3.26 en 3.27 se tiene que,

$$A_{sb} = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c_b \cdot b}{f_y} \quad (3.28)$$

$$\rho_b = \frac{A_{sb}}{b \cdot d} \quad (3.29)$$

Así mismo, se puede determinar la cuantía balanceada de la sección a través la ecuación 3.29.

Se asumirán los siguientes datos para determinar la gráfica momento curvatura, para una sección simplemente reforzada.

$$f'_c := 210 \frac{kgf}{cm^2} \quad (3.30)$$

$$\beta_1 := 0.85 \quad (3.31)$$

$$E_c := 15100 \cdot \sqrt{f'_c \cdot \frac{kgf}{cm^2}} = 218819.789 \frac{kgf}{cm^2} \quad (3.32)$$

$$E_s := 2100000 \frac{kgf}{cm^2} \quad (3.33)$$

$$n := \frac{E_s}{E_c} = 9.597 \quad (3.34)$$

$$\varepsilon_y := 0.002 \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_{cu} := 0.0038 \quad (3.36)$$

Al reemplazar 3.35 y 3.36 en 3.24, se determinará la altura del bloque de compresión.

$$c_b = 36.034 \text{ cm} \quad (3.37)$$

Al reemplazar 3.13, 3.20, 3.30, 3.31 y 3.37 en 3.28, se obtiene el área de refuerzo en condición de falla balanceada, así mismo, con este resultado se puede determinar la cuantía en condición balanceada.

$$A_{sb} = 52.07 \text{ cm}^2 \quad (3.38)$$

$$\rho_b = 0.024 \quad (3.39)$$

A fin de conocer el comportamiento a distintas áreas de reforzamiento, se optó por trabajar con 10 valores del área de acero de refuerzo, las cuales serán proporciones de la cuantía de acero en condición balanceada, como se muestra a continuación:

$$\rho := [0.1 \cdot \rho_b \quad 0.25 \cdot \rho_b \quad 0.3 \cdot \rho_b \quad 0.4 \cdot \rho_b \quad 0.5 \cdot \rho_b \quad 0.6 \cdot \rho_b \quad 0.7 \cdot \rho_b \quad 0.8 \cdot \rho_b \quad 0.9 \cdot \rho_b \quad \rho_b] \quad (3.40)$$

$$\rho = [0.0024 \quad 0.0059 \quad 0.0071 \quad 0.0095 \quad 0.0118 \quad 0.0142 \quad 0.0166 \quad 0.0189 \quad 0.0213 \quad 0.0237]$$

$$A_s = [5.21 \quad 13.02 \quad 15.62 \quad 20.83 \quad 26.03 \quad 31.24 \quad 36.45 \quad 41.66 \quad 46.86 \quad 52.07] \text{ cm}^2 \quad (3.41)$$

Una vez determinadas las áreas de acero de refuerzo a flexión, se procederá a estudiar la primera condición de análisis que soportara la sección simplemente reforzada, la condición de agrietamiento, la cual describe la determinación del momento y curvatura que se producen cuando la fibra inferior de concreto alcanza su módulo de agrietamiento, es decir que la parte inferior de la sección se agrieta.

Como se muestra en la figura 3.8, se deberá determinar el área equivalente de concreto del acero de refuerzo, es decir que se aplicará el método de la sección transformada, para lo cual se utilizara la ecuación 3.42.

$$A_{se} := b \cdot h + (n - 1) \cdot A_s \quad (3.42)$$

Siendo n, la relación de los módulos de elasticidad del acero y del concreto, la cual se determinó en la ecuación 3.34.



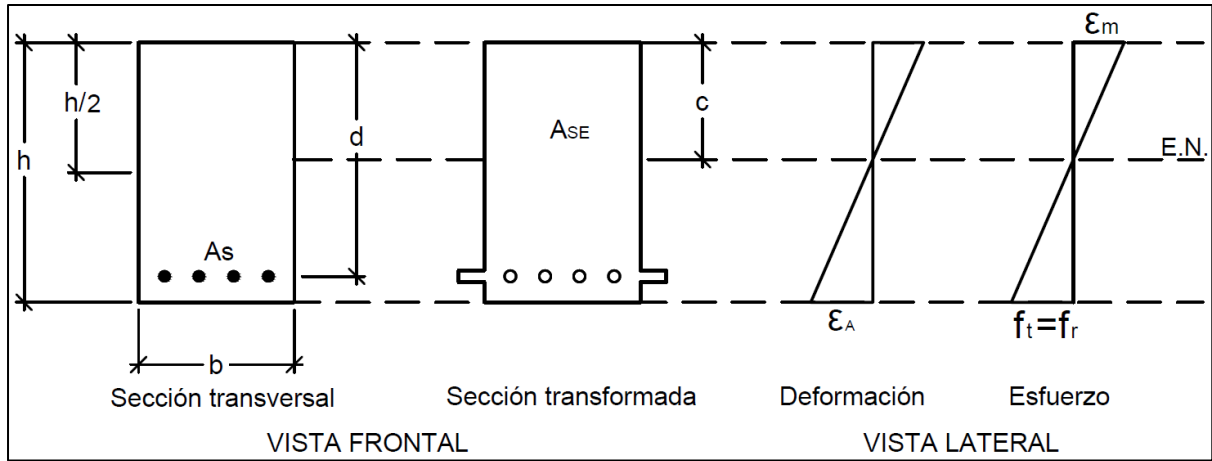


Figura 3.8: Representación gráfica de la condición de agrietamiento de una sección simplemente reforzada.

Seguidamente se determinará la altura del bloque de compresión, en este caso se asume que la altura del bloque de compresión coincide con la altura en la cual se ubica el centroide de la sección.

$$c := \frac{b \cdot \frac{h^2}{2} + (n-1) \cdot A_s \cdot d}{A_{se}} \quad (3.43)$$

Luego se determinará, la inercia de la sección transformada a través de la ecuación 3.44, esto con la finalidad de determinar el momento y la curvatura de la sección en condición de agrietamiento. Así mismo, se deberá determinar el módulo de rotura del concreto (esto puede variar de acuerdo a la resistencia cilíndrica del concreto, en este caso se determinará para una resistencia cilíndrica de 210 kgf/cm<sup>2</sup>).

$$I_{SE} := \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left( \frac{h}{2} - c \right)^2 + (n-1) \cdot A_s \cdot (d-c)^2 \quad (3.44)$$

$$f_r := 2 \cdot \sqrt{f'_c \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}} = 33.466 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad (3.45)$$

Finalmente se determinará el momento y la curvatura de la sección en condición de agrietamiento a través de las siguientes ecuaciones:

$$\phi_A := \frac{f_r}{E_c \cdot (h - c)} \quad (3.46)$$

$$M_A := \frac{f_r \cdot I_{SE}}{(h - c)} \quad (3.47)$$

Al reemplazar los valores de 3.41 en las ecuaciones desde la 3.42 hasta la 3.47, se obtendrán los siguientes valores para la curvatura y momento en condición de agrietamiento.

*Tabla 3.2: Momento y curvatura en condición de agrietamiento de una sección simplemente reforzada.*

	0.1 pb	0.25 pb	0.3 pb	0.4 pb	0.5 pb	0.6 pb	0.7 pb	0.8 pb	0.9 pb	pb
$\phi_A$ (1/m)	0.000448	0.000459	0.000462	0.000469	0.000475	0.000482	0.000489	0.000495	0.000502	0.000508
$M_A$ (ton.m)	7.333	7.895	8.081	8.451	8.819	9.185	9.548	9.91	10.269	10.626

Una vez determinados el momento y curvatura en condición de agrietamiento se procederá a determinar los mismos en la condición de fluencia, es decir cuando el acero de refuerzo inferior comience a fluir ( $f_y=4200\text{kgf/cm}^2$ ).

A través de lo mostrado en la figura 3.9, se podrá deducir a través de la relación de triángulos la siguiente ecuación del diagrama de deformación:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_y \cdot c}{d - c} \quad (3.48)$$

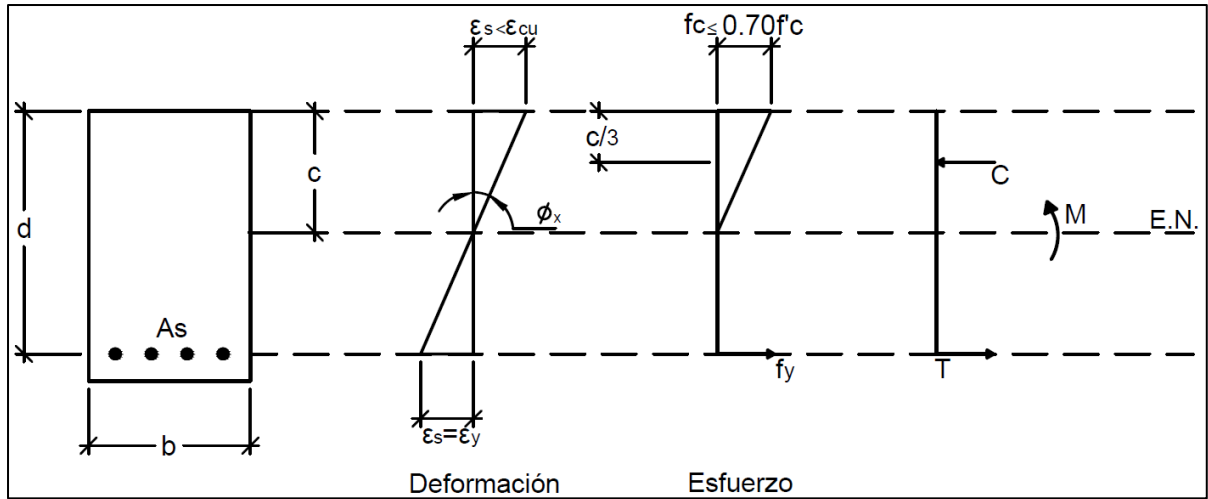


Figura 3.9: Representación gráfica de la condición de fluencia de una sección simplemente reforzada.

Así mismo, se reconoce lo siguiente:

$$T = C \quad (3.49)$$

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.50)$$

$$C = \frac{f_c \cdot c \cdot b}{2} \quad (3.51)$$

Al reemplazar 3.50 y 3.51 en 3.49.

$$\frac{f_c \cdot c \cdot b}{2} = A_s \cdot f_y \quad (3.52)$$

Donde:

$$f_c = E_c \cdot \epsilon_c \quad (3.53)$$

Al reemplazar 3.48 y 3.53 en 3.52, se obtiene:

$$\frac{E_c \cdot \epsilon_y \cdot c^2 \cdot b}{2 \cdot (d - c)} = A_s \cdot f_y \quad (3.54)$$

Reacomodando los términos se tiene:

$$c^2 \cdot (E_c \cdot \varepsilon_y \cdot b) + c \cdot (2 \cdot A_s \cdot f_y) - 2 \cdot A_s \cdot f_y \cdot d = 0 \quad (3.55)$$

Al tener una ecuación de segundo grado, es posible separar los términos de la siguiente manera y resolver la altura del bloque de compresión a través de la ecuación general, mostrada en la ecuación 3.59.

$$A := E_c \cdot \varepsilon_y \cdot b \quad (3.56)$$

$$B := 2 \cdot A_s \cdot f_y \quad (3.57)$$

$$D := -2 \cdot A_s \cdot f_y \cdot d \quad (3.58)$$

$$c := \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot D}}{2 \cdot A} \quad (3.59)$$

Una vez determinada la altura del bloque de compresión se debe verificar si el concreto se comporta elásticamente. Esto realizara a través de las siguientes condiciones, si estas no se cumplen el concreto no se encuentra trabajando elásticamente.

$$\varepsilon_c < \varepsilon_{cu} \quad (3.60)$$

$$f_c < f_{c\_limite} \quad (3.61)$$

Para determinar el valor de  $f_{c\_limite}$  se debe reemplazar la siguiente ecuación, con fines prácticos se reemplazará la resistencia característica utilizada en la condición anterior ( $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$ ).

$$f_{c\_limite} := 0.70 \cdot f'_c = 196 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad (3.62)$$

Si las condiciones descritas por 3.60 y 3.61 se cumplen se determinarán las componentes de tracción y compresión de la sección reemplazando los datos obtenidos en las

ecuaciones 3.50 y 3.51. Seguidamente se determinará la curvatura y el momento de la sección en esta condición.

$$\phi_y = \frac{\epsilon_y}{(d-c)} \quad (3.63)$$

$$M_y = C \cdot \left(d - \frac{c}{3}\right) \quad (3.64)$$

Sin embargo, de no cumplirse las condiciones mostradas en 3.60 y 3.61, se debe replantear la representación gráfica del comportamiento de la sección simplemente armada, como se muestra a continuación:

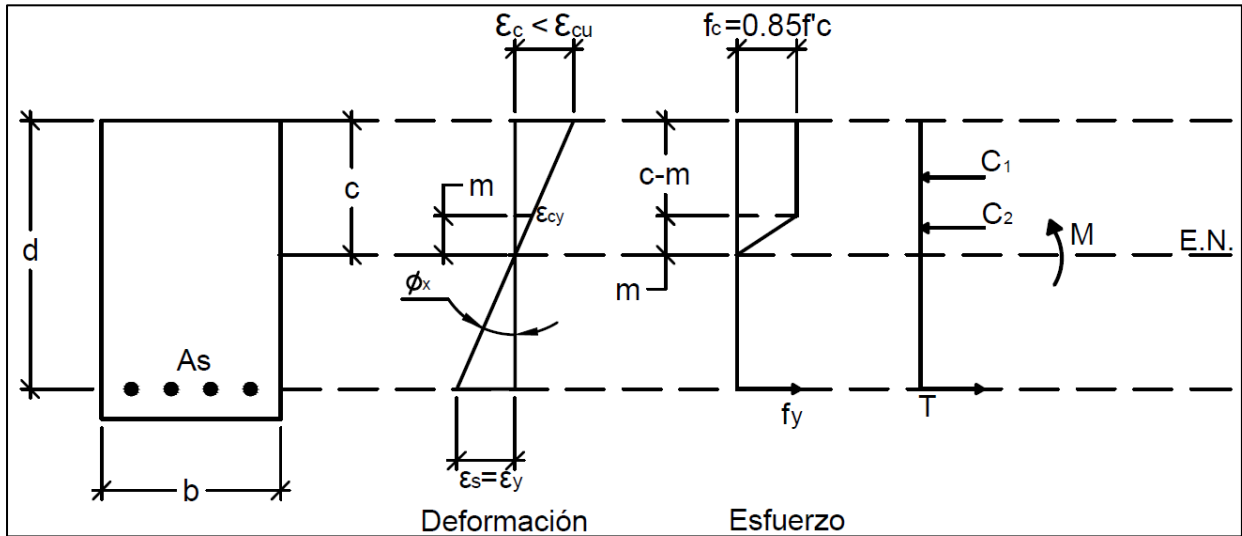


Figura 3.10: Representación gráfica de la condición de fluencia cuando el concreto presenta un comportamiento elasto-plástico en una sección simplemente reforzada.

De la figura 3.10, se puede determinar lo siguiente:

$$c = \frac{\frac{A_s \cdot f_y}{(0.85 \cdot f'_c \cdot b)} + \frac{\epsilon_{cy} \cdot d}{2 \cdot \epsilon_y}}{\left(1 + \frac{\epsilon_{cy}}{2 \cdot \epsilon_y}\right)} \quad (3.65)$$

Así mismo, se debe asumir lo siguiente:

$$\varepsilon_{cy} := 0.0008 \quad (3.66)$$

De la figura 3.10, se determinará  $m$ , sin embargo, se debe remarcar que este valor será menor a  $c$ , por lo que, si este resulta ser mayor que  $c$ , se tomará en menor valor entre  $m$  y  $c$ .

$$m = \frac{\varepsilon_{cy} \cdot (d - c)}{\varepsilon_y} \leq c \quad (3.67)$$

Luego se determinarán las componentes de tracción y compresión de la sección, a través de las siguientes formulas:

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.68)$$

$$C_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot (c - m) \cdot b \quad (3.69)$$

$$C_2 = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot m \cdot b}{2} \quad (3.70)$$

$$C = C_1 + C_2 \quad (3.71)$$

Una vez determinadas las componentes de tracción y compresión, se podrá determinar el momento y la curvatura en esta condición de cedencia.

$$\phi_y = \frac{\varepsilon_y}{(d - c)} \quad (3.72)$$

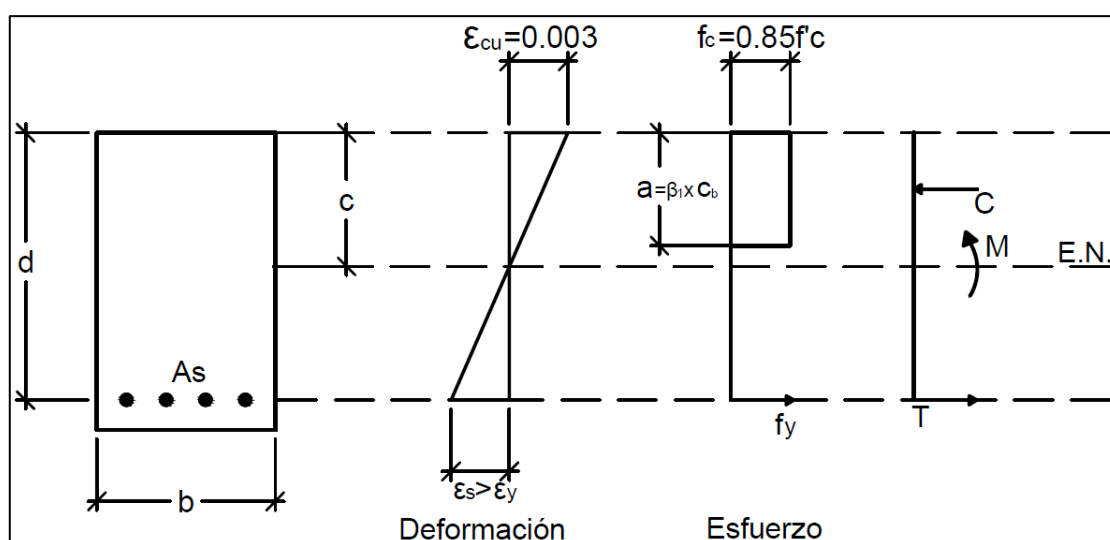
$$M_y = C_1 \cdot \left( d - \frac{(c - m)}{2} \right) + C_2 \cdot \left( d - c + \frac{2 \cdot m}{3} \right) \quad (3.73)$$

Al reemplazar los valores de 3.41 en las ecuaciones desde la 3.56 hasta la 3.73, se obtendrán los siguientes valores para la curvatura y momento en condición de fluencia, cabe señalar que se ha seguido el proceso de verificación del comportamiento del concreto.

*Tabla 3.3: Momento y curvatura en condición de fluencia de una sección simplemente reforzada.*

	0.1 $\rho b$	0.25 $\rho b$	0.3 $\rho b$	0.4 $\rho b$	0.5 $\rho b$	0.6 $\rho b$	0.7 $\rho b$	0.8 $\rho b$	0.9 $\rho b$	$\rho b$
$\phi_y$ (1/m)	0.0045	0.00507	0.00524	0.00561	0.00605	0.00655	0.00715	0.00787	0.00875	0.00985
$M_y$ (ton.m)	11.26	27.651	32.376	42.15	51.247	59.668	67.413	74.483	80.876	86.593

Finalmente se analizará el tercer estado de condición ultima o de agotamiento, en la cual se indica que la fibra superior de concreto de la sección simplemente reforzada ha alcanzado su deformación ultima ( $\epsilon_{cu}=0.0038$ ), además, se sabe que el acero de refuerzo ya ha fluido ( $f_y=4200\text{kgf/cm}^2$ ).



*Figura 3.11: Representación gráfica de la condición ultima o de agotamiento de una sección simplemente reforzada*

De la figura 3.11, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_{cu} \cdot (d - c)}{c} \quad (3.74)$$

$$T = C \quad (3.75)$$

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.76)$$

$$C = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c \cdot b \quad (3.77)$$

Reemplazando 3.76 y 3.77 en 3.75 se obtiene:

$$A_s = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c \cdot b}{f_y} \quad (3.78)$$

Al despejar c, se obtiene:

$$c = \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot b} \quad (3.79)$$

De esta manera se ha determinado la altura del bloque de compresión en función a características ya conocidas de la sección de análisis. Seguidamente se determinarán las componentes de tracción y compresión, reemplazando lo obtenido en 3.79 en 3.76 y 3.77.

Por último, se obtiene la curvatura y el momento en condición ultima.

$$\phi_u = \frac{\epsilon_{cu}}{c} \quad (3.80)$$

$$M_u = C \cdot \left( d - \frac{\beta_1 \cdot c}{2} \right) \quad (3.81)$$

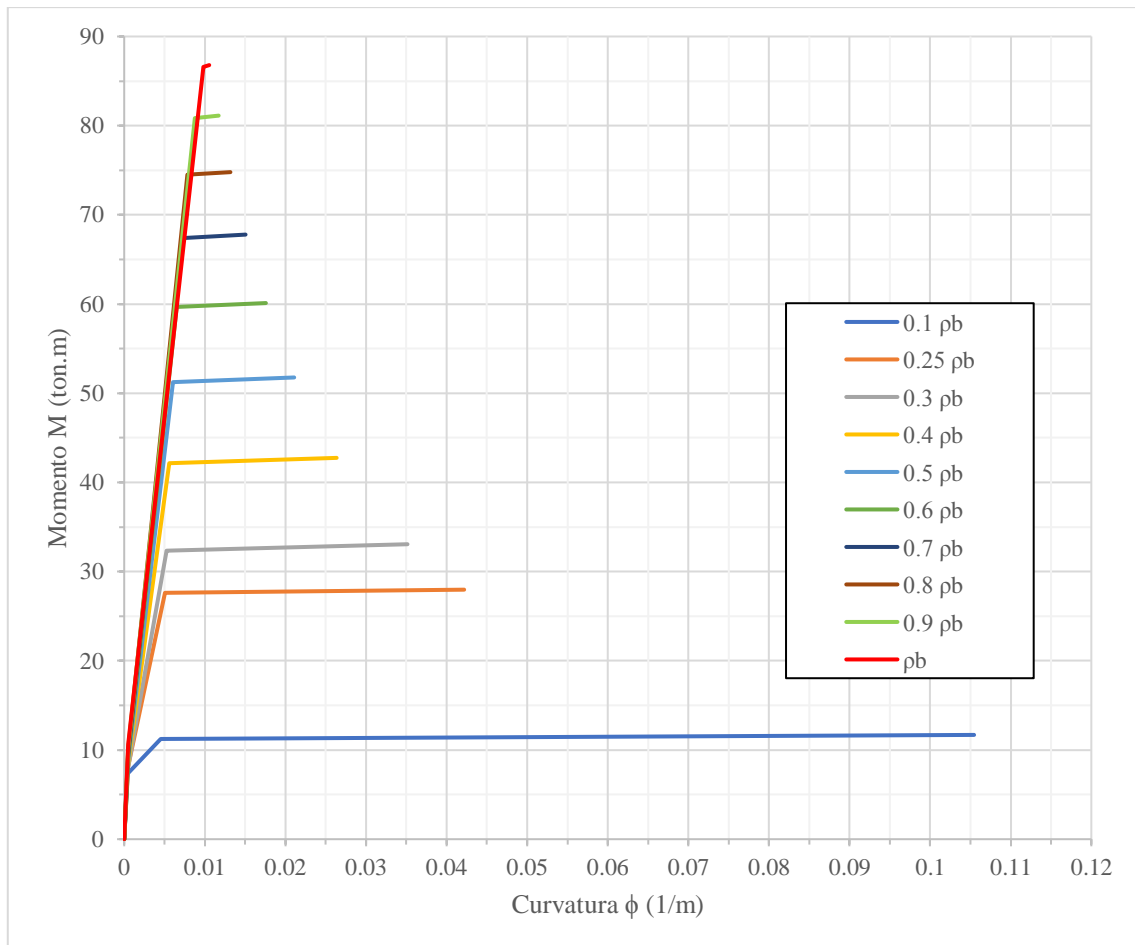
Al reemplazar los valores de 3.41 en las ecuaciones desde la 3.74 hasta la 3.81, se obtendrán los siguientes valores para la curvatura y momento en condición ultima.

*Tabla 3.4: Momento y curvatura en condición ultima de una sección simplemente reforzada.*

	0.1 pb	0.25 pb	0.3 pb	0.4 pb	0.5 pb	0.6 pb	0.7 pb	0.8 pb	0.9 pb	pb
$\phi_u$ (1/m)	0.10545	0.04218	0.03515	0.02636	0.02109	0.01758	0.01506	0.01318	0.01172	0.01055
$M_u$ (ton.m)	11.693	27.977	33.07	42.754	51.768	60.112	67.786	74.79	81.125	86.789



De acuerdo a los valores obtenidos en las tablas 3.2, 3.3 y 3.4, se trazará la siguiente gráfica, la cual mostrará el diagrama momento curvatura para cada una de las áreas de acero evaluadas en 3.41.



*Figura 3.12: Momento vs curvatura, análisis en función a porcentajes de la cuantía balanceada.*

Seguidamente se determinará la ductilidad para cada una de las áreas de acero de refuerzo, esto se realizará a través de la siguiente ecuación:

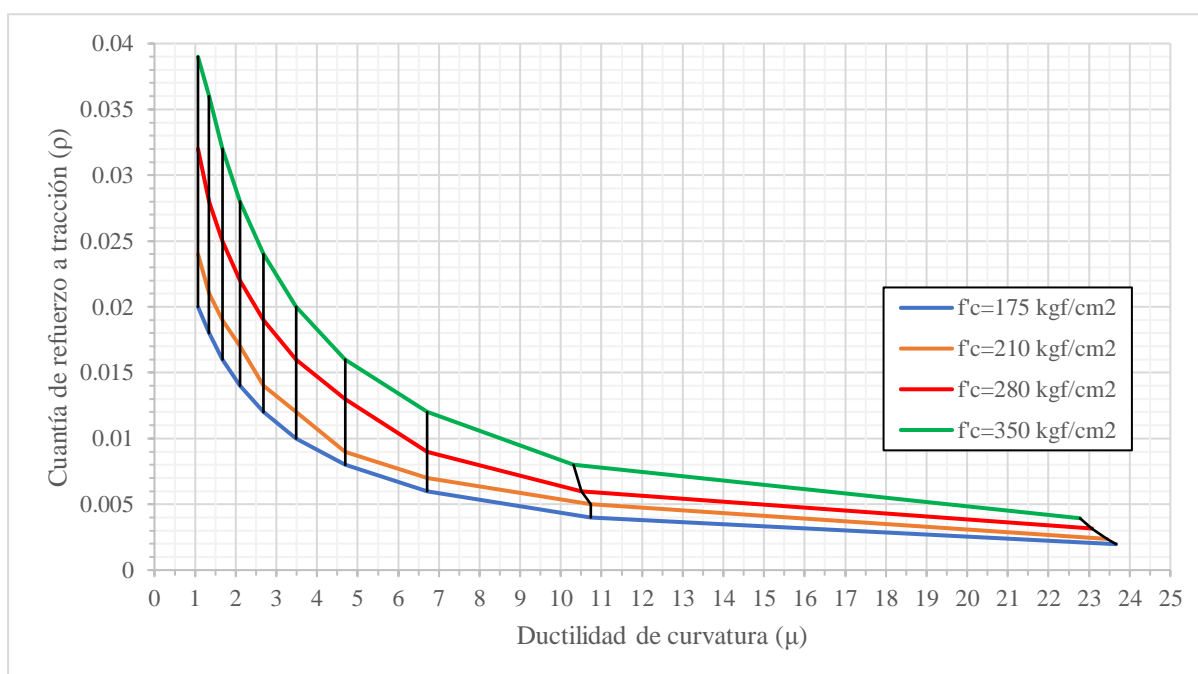
$$\mu = \frac{\phi_u}{\phi_y} \quad (3.82)$$

Finalmente se reemplazará los datos de las tablas 3.3 y 3.4 en la ecuación 3.82, obteniendo lo siguiente:

*Tabla 3.5: Ductilidad para cada área de refuerzo propuesta en 3.41.*

	0.1 $\rho_b$	0.25 $\rho_b$	0.3 $\rho_b$	0.4 $\rho_b$	0.5 $\rho_b$	0.6 $\rho_b$	0.7 $\rho_b$	0.8 $\rho_b$	0.9 $\rho_b$	$\rho_b$
$\mu$	23.433	8.320	6.708	4.699	3.486	2.684	2.106	1.675	1.339	1.071

Seguidamente se trazarán curvas que relacionan la ductilidad de la sección analizada con la cuantía de acero de refuerzo inferior. Así mismo, se realizarán todos los pasos previos, variando la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, obteniendo de esta manera la figura 3.13, para 4 valores de resistencia a la compresión del concreto.



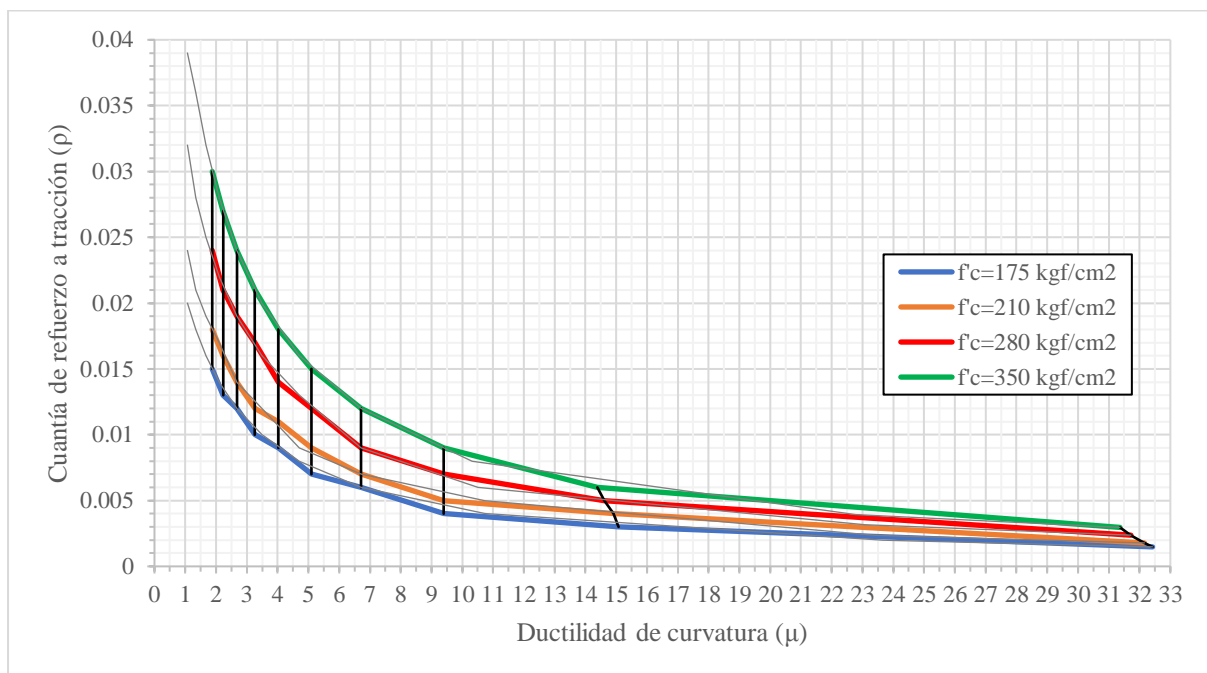
*Figura 3.13: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes de la cuantía balanceada.*

De esta manera se aprecia que, al variar la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, la curva ductilidad vs cuantía de refuerzo se desplaza hacia arriba y a la derecha de la gráfica (ver figura 3.13). Además, esta variación permite afirmar que conforme se incrementa la resistencia a la compresión, la ductilidad es mayor.

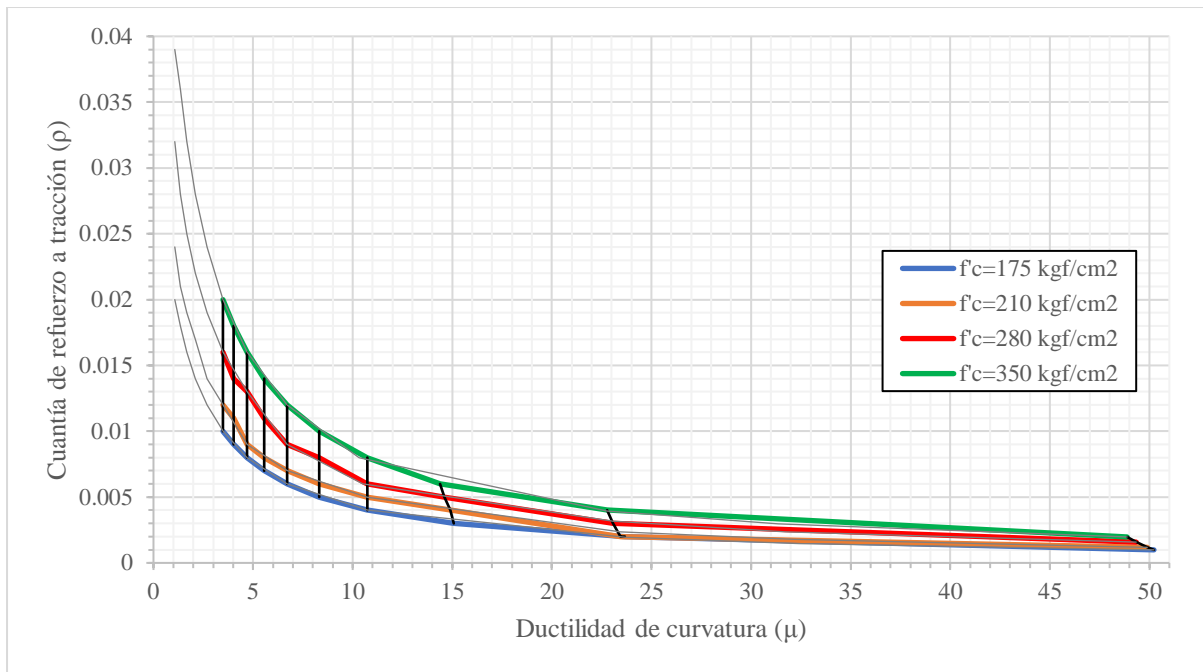
Por otra parte, se aprecia que a partir una proporción de  $0.3 \rho_b$  en adelante, así se incrementa la resistencia a la compresión del concreto, la ductilidad se mantiene, esto se puede identificar a través de las líneas verticales negras mostradas en la figura 3.13.

Con el objetivo de conocer el comportamiento de la sección cuando se aplica otro tipo de armado, se optó por realizar los siguientes análisis. Cabe señalar que cada uno de estos se realizó de manera similar al descrito previamente, por lo cual se mostraran directamente los resultados de las gráficas ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción.

- Evaluación en función a porcentajes del 0.5 y 0.75 de la cuantía balanceada.



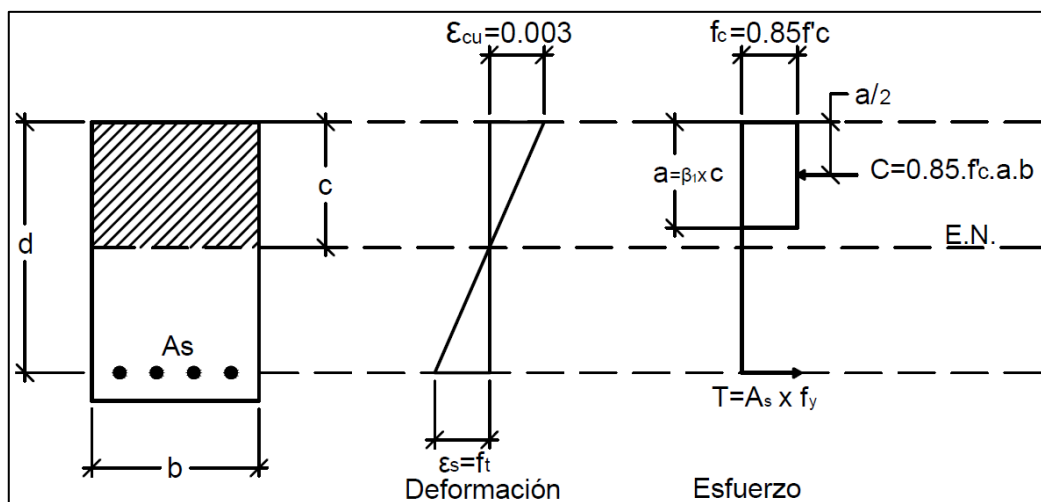
*Figura 3.14: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes del 0.75 de la cuantía balanceada.*



*Figura 3.15: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes del 0.5 de la cuantía balanceada.*

- Evaluación en función a una falla por tracción:

En esta evaluación se identificaron 2 casos, cuando  $f_t = 0.004$  y  $f_t = 0.005$ . Por esta razón, se debe determinar una nueva ecuación para determinar el área de acero de refuerzo.



*Figura 3.16: Representación gráfica de la falla controlado por tracción de una sección simplemente reforzada.*

De la figura 3.16, se determinará la siguiente ecuación que permite determinar la altura del bloque de compresión.

$$c = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{f_t + \varepsilon_{cu}} \quad (3.83)$$

A partir de 3.83, y de la gráfica se puede determinar lo siguiente:

$$T = C \quad (3.84)$$

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.85)$$

$$C = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c \cdot b \quad (3.86)$$

$$A_s = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c_b \cdot b}{f_y} \quad (3.87)$$

Donde finalmente se podrá identificar la cuantía de refuerzo para una falla controlada por tracción.

$$\rho_t = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad (3.88)$$

Finalmente, al reemplazar los datos como dimensiones, resistencias de concreto y acero de refuerzo en el procedimiento de determinación de cada una de las condiciones de una sección sometida a flexión, se podrán obtener las curvas mostradas en las figuras 3.17 y 3.18.

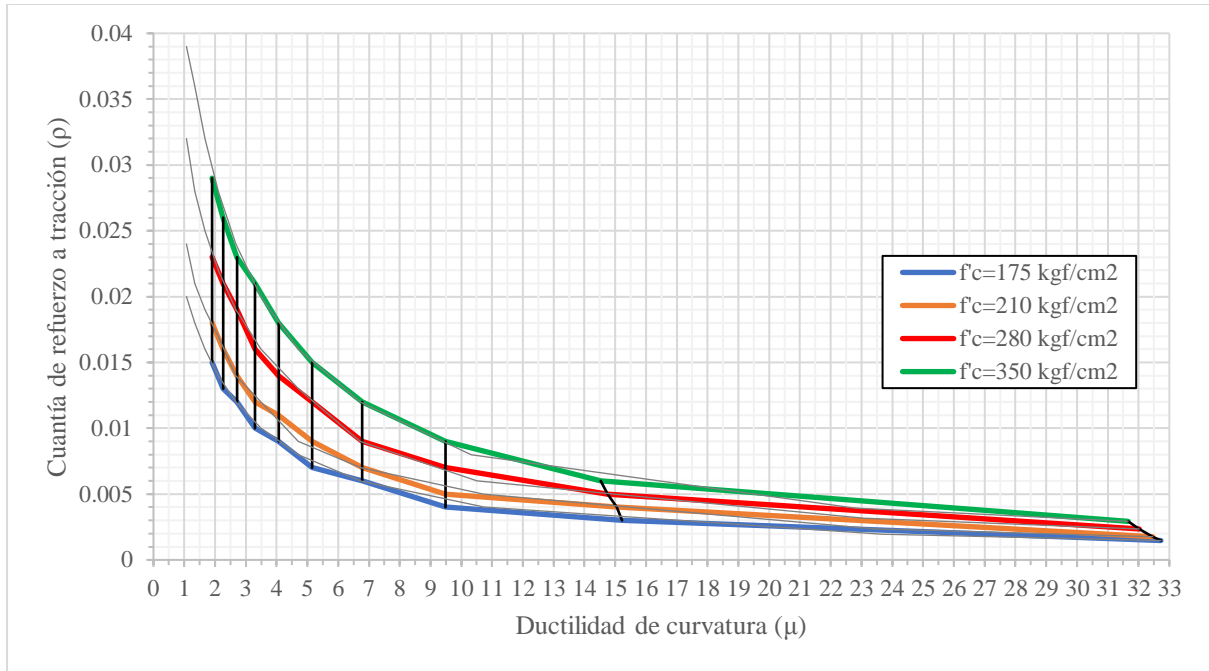


Figura 3.17: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes de la cuantía a falla controlado por tracción ( $f_t=0.004$ ).

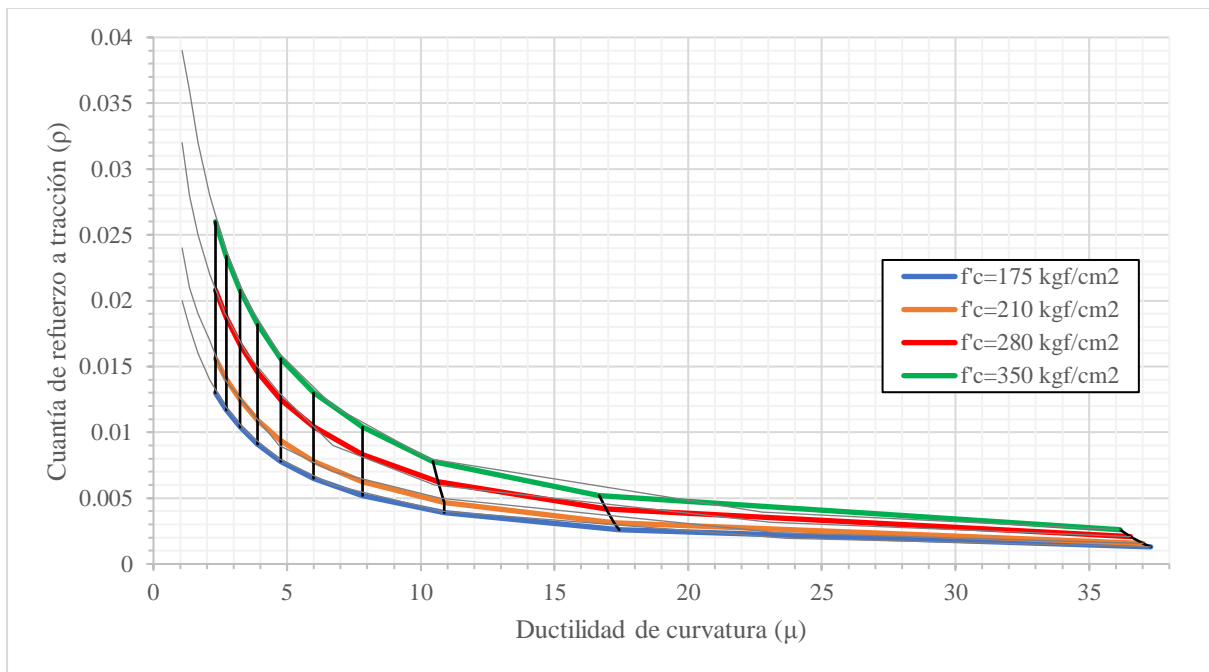


Figura 3.18: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función a porcentajes de la cuantía a falla controlado por tracción ( $f_t=0.005$ ).

### 3.2.2. DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA PARA UNA SECCIÓN DE CONCRETO ARMADO DOBLEMENTE REFORZADA

De modo similar a la sección 3.2.1., se determinará el diagrama momento curvatura para una sección de concreto doblemente reforzada, para esto se utilizarán las dimensiones mostradas en las ecuaciones 3.20, 3.21, 3.22 y 3.23, mostradas en la sección 3.2.1., es decir que la sección de estudio contara con una base de 40 cm y un peralte de 60 cm, así mismo, se debe considerar un recubrimiento de 5 cm tanto en la parte superior como inferior de la sección.

Seguidamente se determinará las cuantías de acero de refuerzo a tracción con las cuales se va a trabajar, para esto se observa la figura 3.19, a partir de la cual se obtendrá la cuantía por falla balanceada en una sección doblemente reforzada.

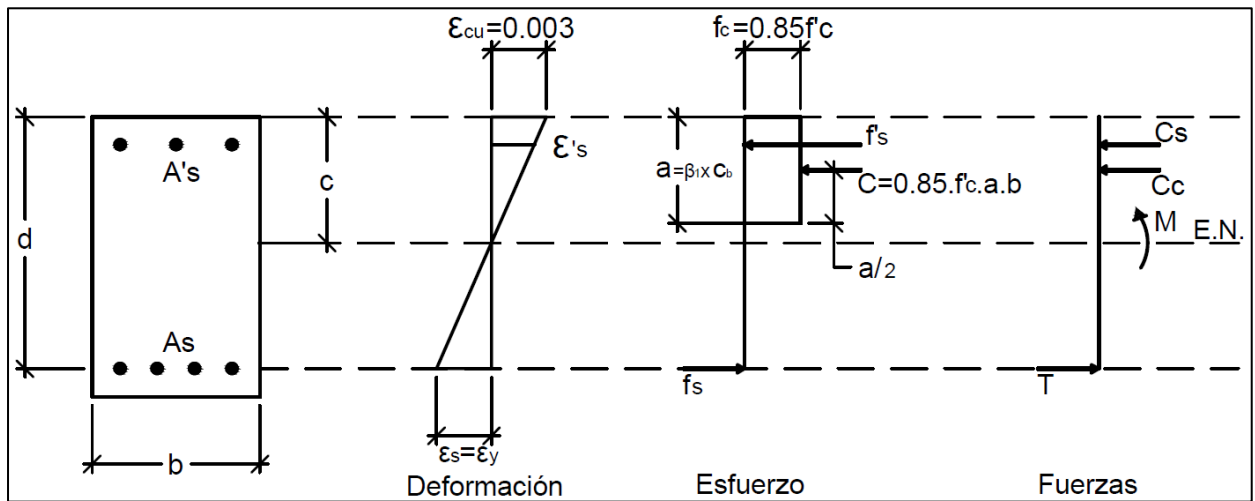


Figura 3.19: Representación gráfica de la falla balanceada de una sección doblemente reforzada.

De acuerdo a lo mostrado en la figura 3.19, se puede determinar la siguiente relación a través de una relación de triángulos.

$$c_b = \frac{\epsilon_{cu} \cdot d}{\epsilon_y + \epsilon_{cu}} \quad (3.89)$$

Por otra parte, se debe indicar que el acero de refuerzo a compresión, representa un porcentaje del acero de refuerzo a tracción.

$$A'_s = N \cdot A_s \quad (3.90)$$

Para el presente trabajo de investigación se trabajó con un acero de refuerzo a compresión de equivalente al 25 %, 50 % y 75 % del acero de refuerzo a tracción. Sin embargo, por tema de practicidad se explicará cómo se obtuvo los resultados para el caso en que el acero de refuerzo a compresión es equivalente al 50 % del acero de refuerzo a tracción.

$$T = A_{sb} \cdot f_y \quad (3.91)$$

$$C_s = N \cdot A_s \cdot f_y \quad (3.92)$$

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c \cdot b \quad (3.93)$$

Para cumplir con lo propuesto por la ecuación 3.92, se debe entender que el acero a compresión ha cedido, es decir que ha alcanzado y ha sobrepasado el esfuerzo de fluencia del acero ( $f_y$ ).

Al hacer equilibrio entre las fuerzas horizontales mostradas en la sección, se obtiene la siguiente relación.

$$T = C_s + C_c \quad (3.94)$$

$$A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s = N \cdot A_s \cdot f_y + 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c \cdot b \quad (3.95)$$

$$A_{sb} = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot c \cdot b}{E_s \cdot \epsilon_y - f_y \cdot N} \quad (3.96)$$

$$\rho_b = \frac{A_{sb}}{b \cdot d} \quad (3.97)$$



Con el fin de obtener el área de acero de refuerzo a tracción y compresión, así como, la cuantía de acero a tracción, se reemplazarán los datos propuesto en la sección 3.2.1. en las ecuaciones 3.30 a la 3.36.

$$c_b = 33 \text{ cm} \quad (3.98)$$

$$A_{sb} = 79.475 \text{ cm}^2 \quad (3.99)$$

$$A'_{sb} = 39.738 \text{ cm}^2 \quad (3.100)$$

$$\rho_b = 0.036 \quad (3.101)$$

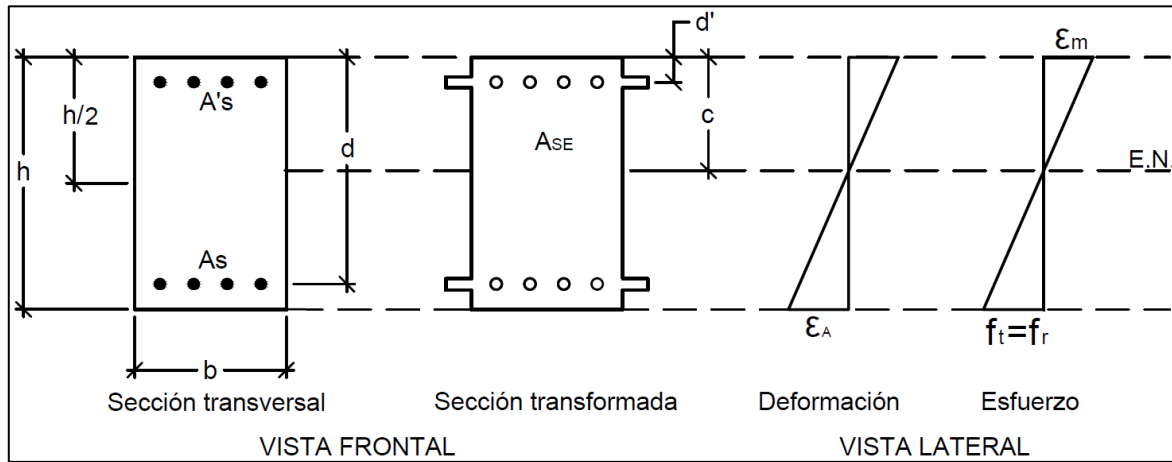
De manera similar a la sección 3.2.1., evaluarán 4 casos, en los cuales se evaluarán distintas resistencias a la compresión cilíndrica del concreto, de acuerdo con esto se obtienen las siguientes áreas de acero de refuerzo a tracción y compresión, para realizar el estudio de la sección doblemente reforzada.

*Tabla 3.6: Cuantía de refuerzo a tracción en condición de falla balanceada, Acero de refuerzo en tensión, Acero de refuerzo en compresión.*

CASO		0.1 $\rho_b$	0.25 $\rho_b$	0.3 $\rho_b$	0.4 $\rho_b$	0.5 $\rho_b$	0.6 $\rho_b$	0.7 $\rho_b$	0.8 $\rho_b$	0.9 $\rho_b$	$\rho_b$
1	$\rho$	0.0036	0.0072	0.0108	0.0144	0.0180	0.0216	0.0252	0.0288	0.0324	0.0360
	As (cm <sup>2</sup> )	7.97	15.95	23.92	31.90	39.87	47.84	55.82	63.79	71.76	79.74
	A's (cm <sup>2</sup> )	3.99	7.97	11.96	15.95	19.93	23.92	27.91	31.90	35.88	39.87
2	$\rho$	0.0043	0.0086	0.0129	0.0172	0.0215	0.0258	0.0301	0.0344	0.0387	0.0430
	As (cm <sup>2</sup> )	9.54	19.07	28.61	38.15	47.69	57.22	66.76	76.30	85.83	95.37
	A's (cm <sup>2</sup> )	4.77	9.54	14.31	19.07	23.84	28.61	33.38	38.15	42.92	47.69
3	$\rho$	0.0058	0.0116	0.0174	0.0232	0.0290	0.0348	0.0406	0.0464	0.0522	0.0580
	As (cm <sup>2</sup> )	12.72	25.43	38.15	50.86	63.58	76.30	89.01	101.73	114.44	127.16
	A's (cm <sup>2</sup> )	6.36	12.72	19.07	25.43	31.79	38.15	44.51	50.86	57.22	63.58
4	$\rho$	0.0072	0.0144	0.0216	0.0288	0.0360	0.0432	0.0504	0.0576	0.0648	0.0720
	As (cm <sup>2</sup> )	15.90	31.79	47.69	63.58	79.48	95.37	111.27	127.16	143.06	158.95
	A's (cm <sup>2</sup> )	7.95	15.90	23.84	31.79	39.74	47.69	55.63	63.58	71.53	79.48

Una vez determinadas las áreas de acero de refuerzo en tracción y compresión, se procederá a estudiar la condición de agrietamiento de la sección de estudio, la cual describe el comportamiento de la sección de concreto doblemente reforzada cuando la fibra extrema

inferior de concreto alcanza su esfuerzo de rotura, es decir cuando la sección se fisura. Como se muestra en la figura 3.20, se debe determinar el área equivalente de concreto del acero de refuerzo a tracción y compresión, aplicando el método de la sección transformada. Además, se debe determinar la altura del bloque de compresión, la cual en esta condición se encontrará ubicada en el centroide de la sección transformada.



*Figura 3.20: Representación gráfica de la condición de agrietamiento de una sección doblemente reforzada.*

$$A_{se} := b \cdot h + (n-1) \cdot (A_s + A'_s) \quad (3.102)$$

$$c := \frac{b \cdot \frac{h^2}{2} + (n-1) \cdot (A_s \cdot d + A'_s \cdot d')}{A_{se}} \quad (3.103)$$

Seguidamente, se determinará la inercia de la sección transformada a través de la sección 3.104.

$$I_{SE} := \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left( \frac{h}{2} - c \right)^2 + (n-1) \cdot (A_s \cdot (d-c)^2 + A'_s \cdot (c-d')^2) \quad (3.104)$$

Finalmente se determinarán la curvatura y momento para la condición de agrietamiento, sin embargo, se debe tomar en cuenta el módulo de rotura del concreto calculado en la ecuación 3.45.

$$\phi_A := \frac{f_r}{E_c \cdot (h - c)} \quad (3.105)$$

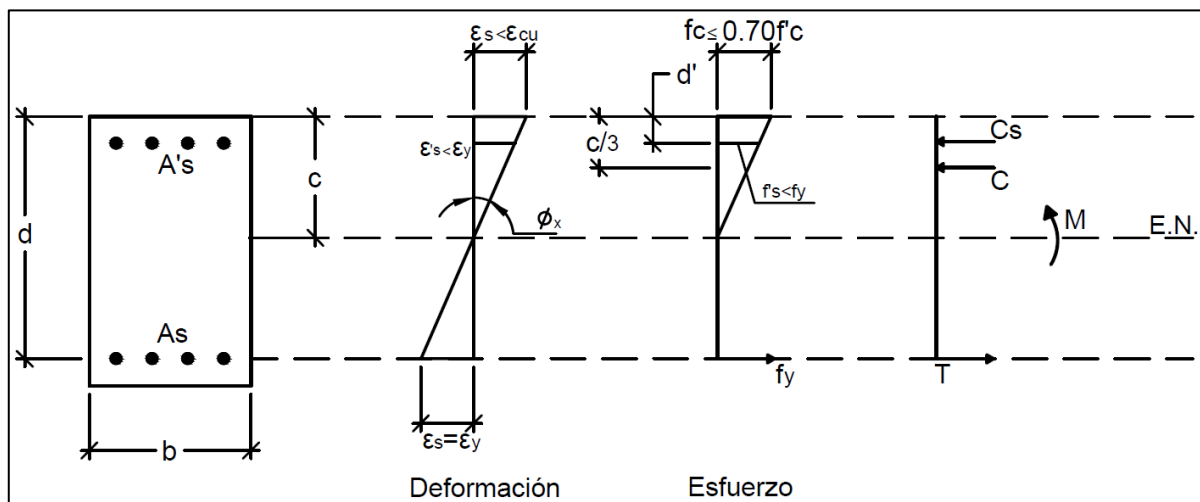
$$M_A := \frac{f_r \cdot I_{SE}}{(h - c)} \quad (3.106)$$

Al reemplazar los valores del caso 1 de la tabla 3.6 en las ecuaciones desde 3.102 hasta 3.106, se obtiene los siguientes valores para la curvatura y momento de agrietamiento.

*Tabla 3.7: Momento y curvatura en condición de agrietamiento de una sección doblemente reforzada.*

	0.1 $\rho_b$	0.25 $\rho_b$	0.3 $\rho_b$	0.4 $\rho_b$	0.5 $\rho_b$	0.6 $\rho_b$	0.7 $\rho_b$	0.8 $\rho_b$	0.9 $\rho_b$	$\rho_b$
$\phi_A$ (1/m)	0.000447	0.000452	0.000457	0.000462	0.000466	0.00047	0.000474	0.000478	0.000481	0.000485
$M_A$ (ton.m)	7.06	7.774	8.492	9.213	9.936	10.663	11.391	12.122	12.855	13.589

Como siguiente paso se determinará la condición de fluencia, la cual describe el comportamiento de la sección cuando el acero de refuerzo a tracción comienza a fluir, es decir que alcanza el esfuerzo de fluencia ( $f_y=4200\text{kgf/cm}^2$ ).



*Figura 3.21: Representación gráfica de la condición de fluencia de una sección doblemente reforzada.*

A través de lo mostrado en la figura 3.21, se puede deducir las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_y \cdot c}{d - c} \quad (3.107)$$

$$C_c = \frac{f_c \cdot c \cdot b}{2} \quad (3.108)$$

$$C_s = A'_s \cdot f'_s \quad (3.109)$$

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.110)$$

Al realizar equilibrio entre las fuerzas horizontales mostradas en la figura 3.21, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{f_c \cdot c \cdot b}{2} + A'_s \cdot f'_s = A_s \cdot f_y \quad (3.111)$$

Además, se sabe que:

$$f_c = E_c \cdot \varepsilon_c \quad (3.112)$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_y \cdot (c - d')}{d - c} \quad (3.113)$$

$$f'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s \quad (3.114)$$

$$f_y = E_s \cdot \varepsilon_y \quad (3.115)$$

Al reemplazar 3.112, 3.113, 3.114 y 3.115 en 3.111.

$$\frac{E_c \cdot \varepsilon_y \cdot c^2 \cdot b}{2} = A_s \cdot f_y \cdot (d - c) - A'_s \cdot f_y \cdot (c - d') \quad (3.116)$$

Reacomodando los términos se tiene:

$$c^2 \cdot \left( \frac{E_c \cdot \varepsilon_y \cdot b}{2} \right) + c \cdot (f_y \cdot (A_s + A'_s)) - f_y \cdot (A'_s \cdot d' + A_s \cdot d) = 0 \quad (3.117)$$

Como se observa en 3.117, se tiene una ecuación de segundo grado, por lo que es posible separar los términos de la siguiente manera y obtener la altura del bloque de compresión a través de la ecuación general.

$$A := \frac{E_c \cdot \varepsilon_y \cdot b}{2} \quad (3.118)$$

$$B := f_y \cdot (A_s + A'_s) \quad (3.119)$$

$$D := -(f_y \cdot (A'_s \cdot d' + A_s \cdot d)) \quad (3.120)$$

$$c := \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot D}}{2 \cdot A} \quad (3.121)$$

De manera similar a la sección 3.2.1. se debe verificar si el concreto se comporta elásticamente. Es decir que debe cumplir las condiciones establecidas en 3.60 y 3.61, determinando el esfuerzo límite del concreto a través de la ecuación 3.62.

Si las condiciones mostradas en 3.60 y 3.61 se cumplen se determinarán las componentes de tracción y compresión de la sección de estudio a través de las ecuaciones 3.108, 3.109 y 3.110. Seguidamente se determinará la curvatura y el momento de la sección en la condición de fluencia.

$$\phi_y := \frac{\varepsilon_y}{(d - c)} \quad (3.122)$$

$$M_y := C_c \cdot \left(d - \frac{c}{3}\right) + C_s \cdot (d - d') \quad (3.123)$$

En caso no se cumplan las condiciones establecidas en 3.60 y 3.61, se debe replantear la representación del comportamiento de la sección doblemente reforzada, como se muestra a continuación:

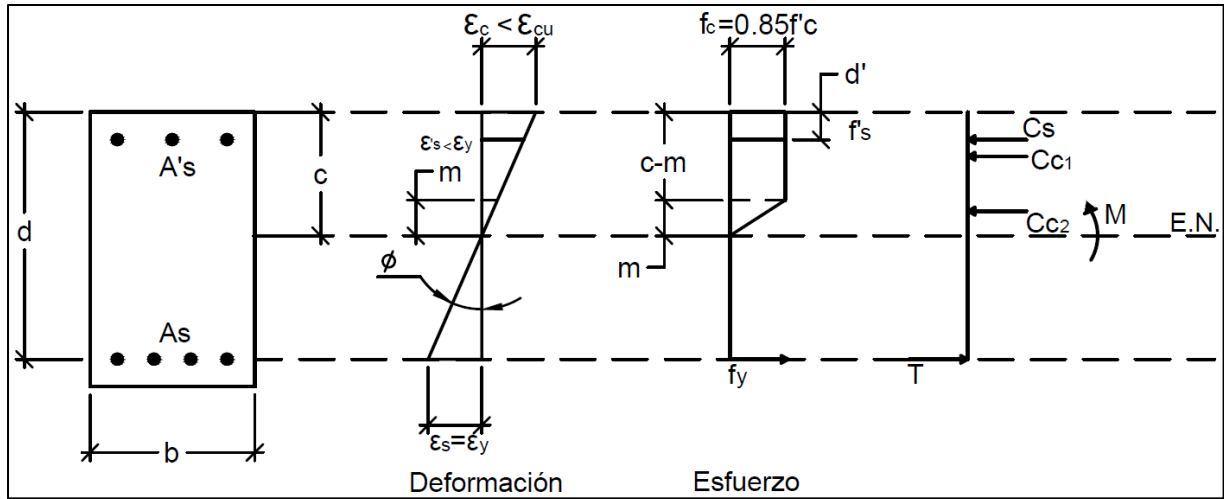


Figura 3.22: Representación gráfica de la condición de fluencia cuando el concreto presenta un comportamiento elasto-plástico en una sección doblemente reforzada.

En base a lo mostrado en la figura 3.22, se obtiene lo siguiente:

$$C_{c1} = 0.85 \cdot f'_c \cdot (c - m) \cdot b \quad (3.124)$$

$$C_{c2} = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot m \cdot b}{2} \quad (3.125)$$

$$C_s = A'_s \cdot f'_s \quad (3.126)$$

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.127)$$

Así mismo, se debe asumir lo siguiente:

$$\epsilon_{cy} = 0.0008 \quad (3.128)$$

De la figura 3.22, se puede determinar  $m$ , sin embargo, se debe tomar en cuenta que este valor será menor a  $c$ , por lo que, si  $m$  resulta ser mayor a  $c$ , se tomará el menor valor entre  $m$  y  $c$ .

$$m = \frac{\epsilon_{cy} \cdot (c - d)}{\epsilon_y} \leq c \quad (3.129)$$

Seguidamente, al realizar equilibrio de fuerzas entre las fuerzas horizontales mostradas en la figura 3.22, se obtiene lo siguiente:

$$0.85 \cdot f'_c \cdot \left(c - \frac{m}{2}\right) \cdot b = A_s \cdot f_y - A'_s \cdot f_y \cdot \frac{(c - d')}{d - c} \quad (3.130)$$

Reacomodando la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} & c^2 \cdot (2 \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_{cy}) \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot b) + \\ & -c \cdot ((2 \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_{cy}) \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d) + 2 \cdot \varepsilon_y \cdot f_y \cdot (A_s + A'_s) + 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot \varepsilon_{cy} \cdot d) + \\ & + 2 \cdot \varepsilon_y \cdot f_y \cdot (A_s \cdot d + A'_s \cdot d') + 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot \varepsilon_{cy} \cdot d^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

Como se observa en 3.131, se tiene una ecuación de segundo grado, por lo que es posible separar los términos de la siguiente manera y obtener la altura del bloque de compresión a través de la ecuación general.

$$A := (2 \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_{cy}) \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot b) \quad (3.132)$$

$$B := -((2 \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_{cy}) \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d) + 2 \cdot \varepsilon_y \cdot f_y \cdot (A_s + A'_s) + 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d \cdot \varepsilon_{cy}) \quad (3.133)$$

$$D := 2 \cdot \varepsilon_y \cdot f_y \cdot (A_s \cdot d + A'_s \cdot d') + 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 \cdot \varepsilon_{cy} \quad (3.134)$$

$$c := \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot D}}{2 \cdot A} \quad (3.135)$$

Luego se determinarán las componentes de las fuerzas horizontales de la sección, es decir que se determinaran 3.124, 3.125, 3.126 y 3.127.

Finalmente se determinará el momento y curvatura en la condición de fluencia del acero de refuerzo a tracción.

$$\phi_y := \frac{\varepsilon_y}{(d - c)} \quad (3.136)$$

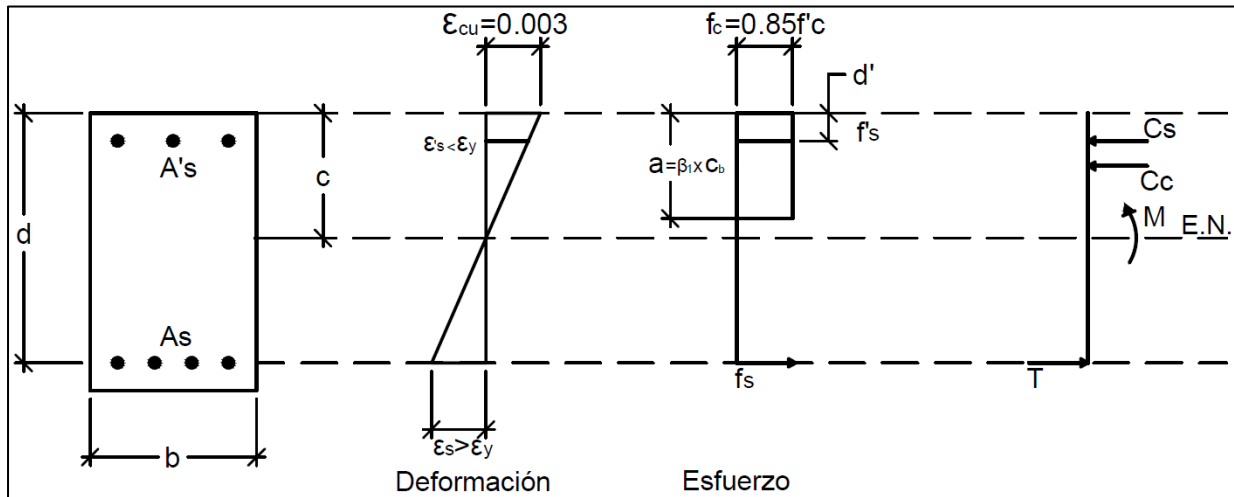
$$M_y := C_{c1} \cdot \left( d - \frac{c-m}{2} \right) + C_{c2} \cdot \left( d - c + \frac{2 \cdot m}{3} \right) + C_s \cdot (d - d') \quad (3.137)$$

Al reemplazar los valores del caso 1 de la tabla 3.6 en las ecuaciones desde 3.107 hasta 3.137, se obtiene los siguientes valores para la curvatura y momento en la condición de fluencia.

*Tabla 3.8: Momento y curvatura en condición de fluencia de una sección doblemente reforzada.*

	0.1 pb	0.25 pb	0.3 pb	0.4 pb	0.5 pb	0.6 pb	0.7 pb	0.8 pb	0.9 pb	pb
$\phi_y$ (1/m)	0.004726	0.005266	0.005738	0.006198	0.006633	0.007036	0.007401	0.00773	0.008066	0.008905
$M_y$ (ton.m)	16.925	32.965	48.344	63.307	78.152	93.052	108.095	123.309	138.514	151.635

Finalmente se analizará el tercer estado de condición ultima o de agotamiento, en el cual se estudia el comportamiento de la fibra extrema superior cuando alcanza la deformación ultima ( $\epsilon_{cu}=0.0038$ ), además, se sabe que el acero de refuerzo ya ha fluido ( $f_y=4200\text{kgf/cm}^2$ ).



*Figura 3.23: Representación gráfica de la condición de ultima o de agotamiento de una sección doblemente reforzada.*

De la figura 3.23, se obtienen las siguientes relaciones:



$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d - c)}{c} \quad (3.138)$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (c - d')}{c} \quad (3.139)$$

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot a \cdot b \quad (3.140)$$

$$C_s = A'_s \cdot f'_s \quad (3.141)$$

$$T = A_s \cdot f_y \quad (3.142)$$

Seguidamente, al realizar equilibrio de fuerzas entre las fuerzas horizontales mostradas en la figura 3.23, se obtiene lo siguiente:

$$A_s \cdot f_y = \beta_1 \cdot c \cdot 0.85 \cdot f'_c \cdot b + A'_s \cdot f'_s \quad (3.143)$$

$$f'_s = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{cu} \cdot (c - d')}{c} \quad (3.144)$$

Reemplazando 3.144 en 3.143 y reacomodando se tiene:

$$c^2 \cdot (0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c \cdot b) + c \cdot (A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_{cu} - A_s \cdot f_y) - A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_{cu} \cdot d' = 0 \quad (3.145)$$

Ya que 3.145, es una ecuación de segundo grado, se obtendrá c a través de la ecuación general, así mismo, es posible separar los términos de 3.145 de la siguiente manera:

$$A := 0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c \cdot b \quad (3.146)$$

$$B := A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_{cu} - A_s \cdot f_y \quad (3.147)$$

$$D := -(A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_{cu} \cdot d') \quad (3.148)$$

$$c := \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot D}}{2 \cdot A} \quad (3.149)$$

Finalmente se obtendrán las componentes de las fuerzas horizontales mostradas en la figura 3.23 a través de las ecuaciones 3.140, 3.141 y 3.142, así mismo, se determinará la curvatura y momento último de la sección de estudio.

$$\phi_u := \frac{\varepsilon_{cu}}{c} \quad (3.150)$$

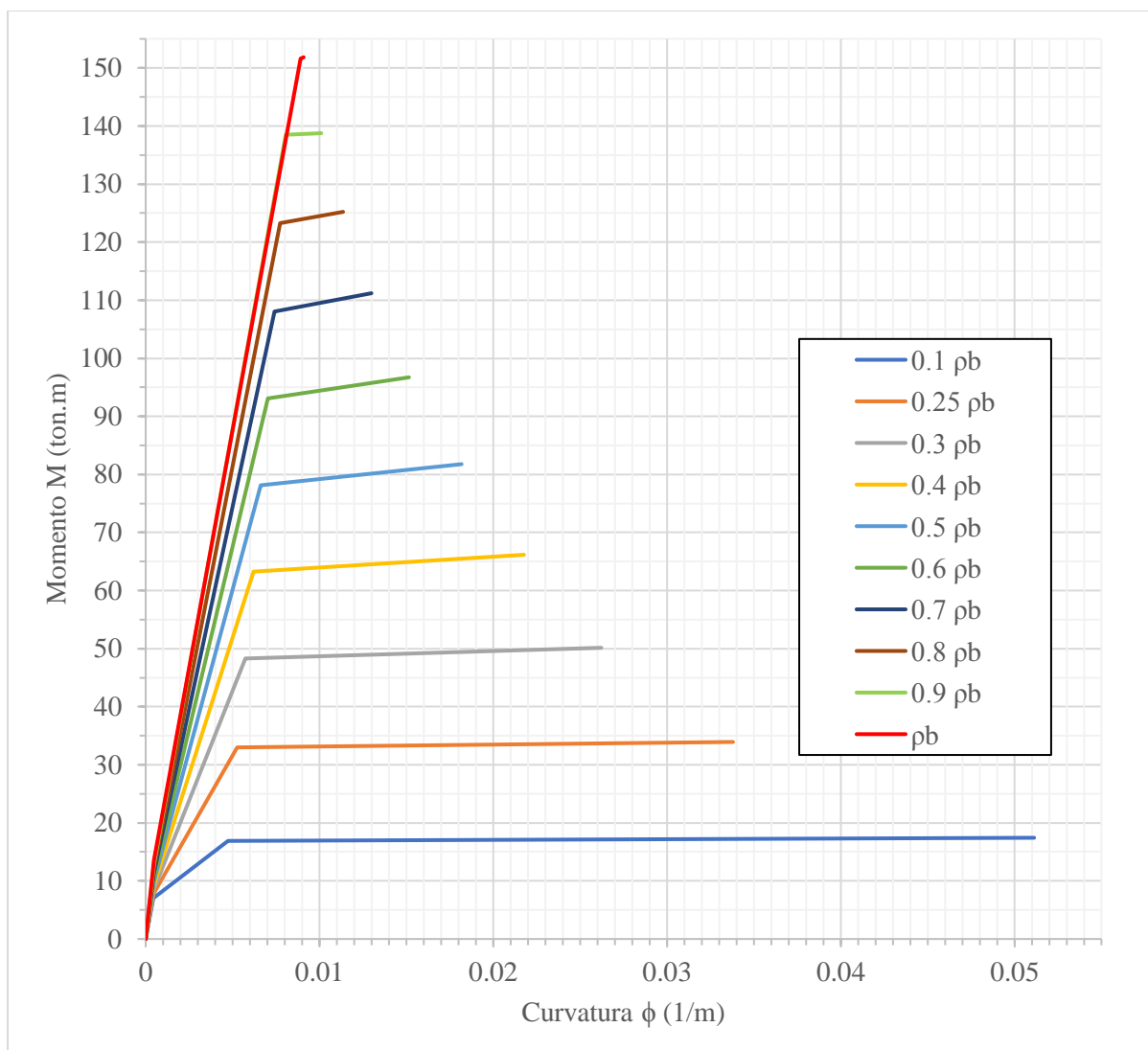
$$M_u := C_c \cdot \left( d - \frac{\beta_1 \cdot c}{2} \right) + C_s \cdot (d - d') \quad (3.151)$$

Al reemplazar los valores del caso 1 de la tabla 3.6 en las ecuaciones desde 3.138 hasta 3.151, se obtiene los siguientes valores para la curvatura y momento en la condición última.

*Tabla 3.9: Momento y curvatura en condición última de una sección doblemente reforzada.*

	<b>0.1 pb</b>	<b>0.25 pb</b>	<b>0.3 pb</b>	<b>0.4 pb</b>	<b>0.5 pb</b>	<b>0.6 pb</b>	<b>0.7 pb</b>	<b>0.8 pb</b>	<b>0.9 pb</b>	<b>pb</b>
$\phi_u$ (1/m)	0.05113	0.0338	0.02622	0.02177	0.01818	0.01515	0.01299	0.01136	0.0101	0.00909
$M_u$ (ton.m)	17.433	33.931	50.149	66.161	81.769	96.719	111.2	125.213	138.758	151.835

De acuerdo a los valores obtenidos en las tablas 3.7, 3.8 y 3.9, se trazará la siguiente gráfica la cual mostrara el diagrama momento curvatura para cada una de los porcentajes de áreas de acero de refuerzo evaluados en esta sección.



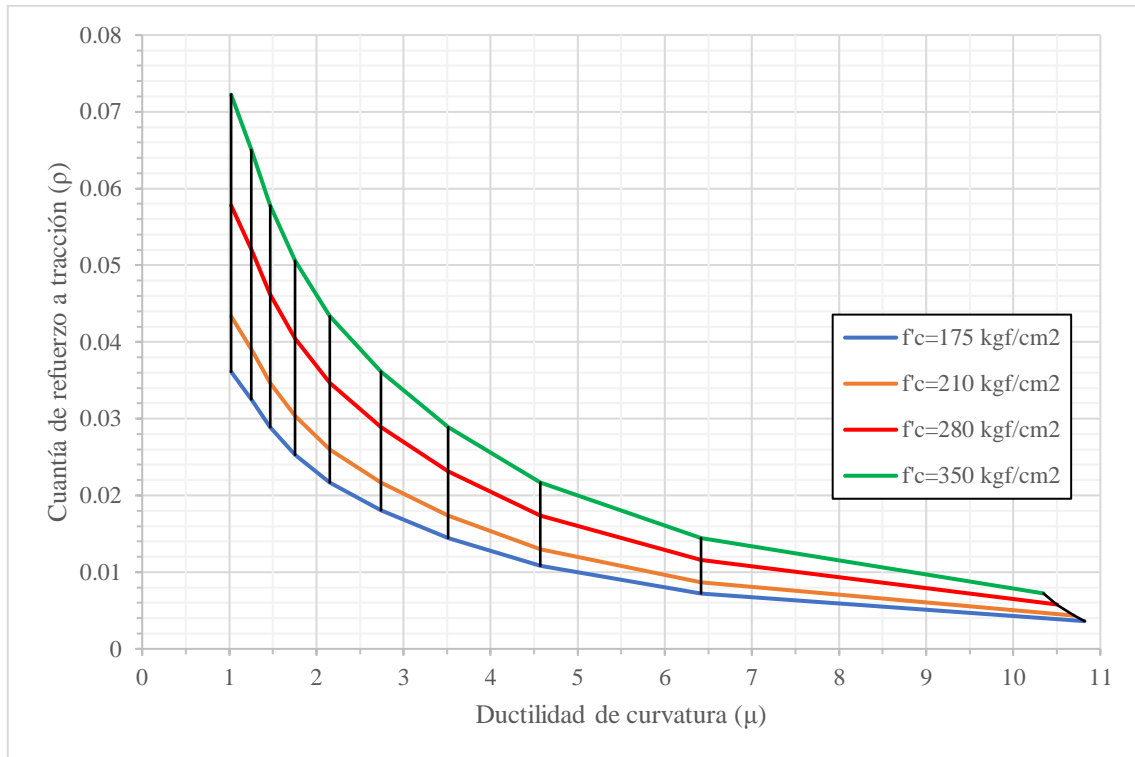
*Figura 3.24: Momento vs curvatura, análisis en función a porcentajes de la cuantía de acero de refuerzo balanceada.*

Seguidamente se determinará la ductilidad para cada una de las áreas de acero de refuerzo, esto se realizará a través de la ecuación 3.82, obteniendo los siguientes resultados.

*Tabla 3.10: Ductilidad para cada área de acero propuesta para el caso 1 en la tabla 3.6.*

	0.1 $\rho_b$	0.25 $\rho_b$	0.3 $\rho_b$	0.4 $\rho_b$	0.5 $\rho_b$	0.6 $\rho_b$	0.7 $\rho_b$	0.8 $\rho_b$	0.9 $\rho_b$	$\rho_b$
$\mu$	10.819	6.419	4.570	3.512	2.741	2.153	1.755	1.470	1.252	1.021

Seguidamente se trazarán curvas que relacionan la ductilidad de la sección analizada con la cuantía de acero de refuerzo a tracción. Así mismo, se realizarán todos los pasos previos, variando la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, obteniendo de esta manera la figura 3.25, para 4 valores de resistencia a la compresión del concreto.



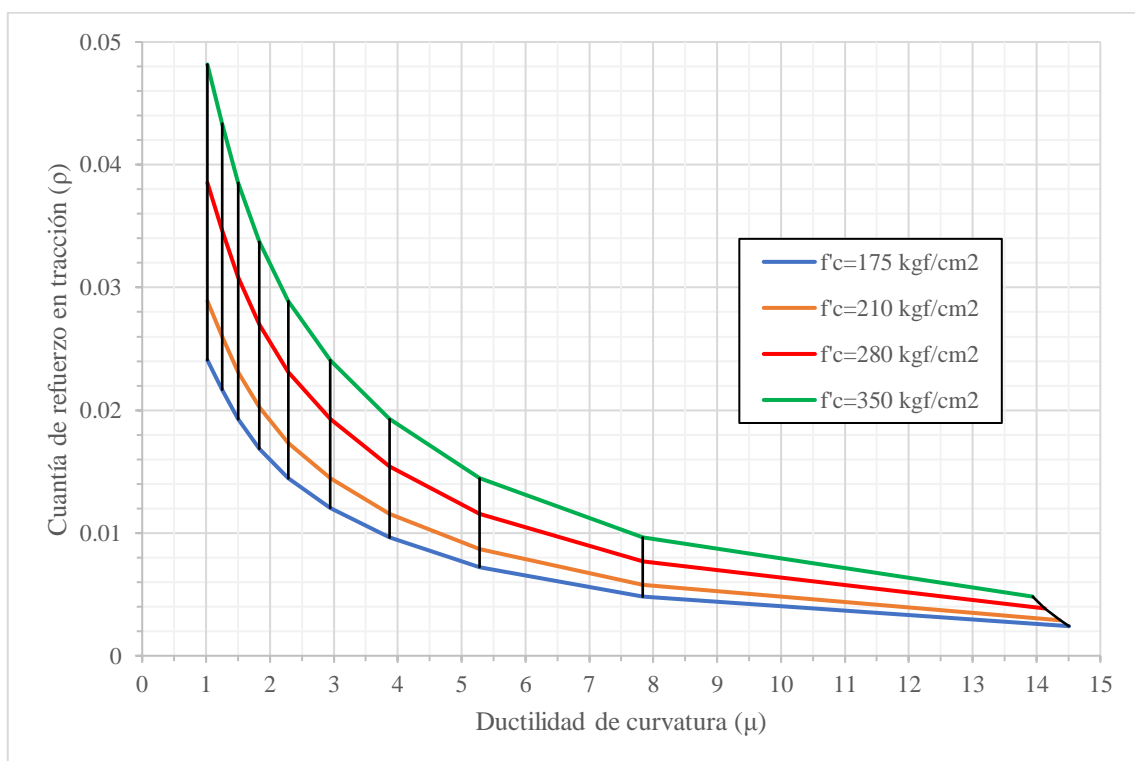
*Figura 3.25: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función de porcentajes de la cuantía balanceada, con acero de refuerzo a compresión igual al 50% del acero de refuerzo a tracción.*

De esta manera se aprecia que, al variar la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, la curva ductilidad vs cuantía de refuerzo se desplaza hacia arriba y a la derecha de la gráfica, como se determinó en la sección 3.2.1. Además, esta variación permite verificar que conforme se incrementa la resistencia a la compresión en una sección doblemente armada, la ductilidad es mayor. Es decir que el comportamiento de una sección simplemente armada y una sección doblemente armada es similar al incrementarse la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto.

Por otra parte, se aprecia que a partir una proporción de  $0.2 \rho_b$  en adelante, así se incrementa la resistencia a la compresión del concreto, la ductilidad se mantiene, esto se puede identificar a través de las líneas verticales negras mostradas en la figura 3.23.

Con el objetivo de conocer el comportamiento de la sección cuando se aplica otro porcentaje de acero de refuerzo a compresión, se optó por realizar los siguientes análisis. Cabe señalar que cada uno de estos se realizó de manera similar al descrito previamente, por lo cual se mostraran directamente los resultados de las gráficas ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción.

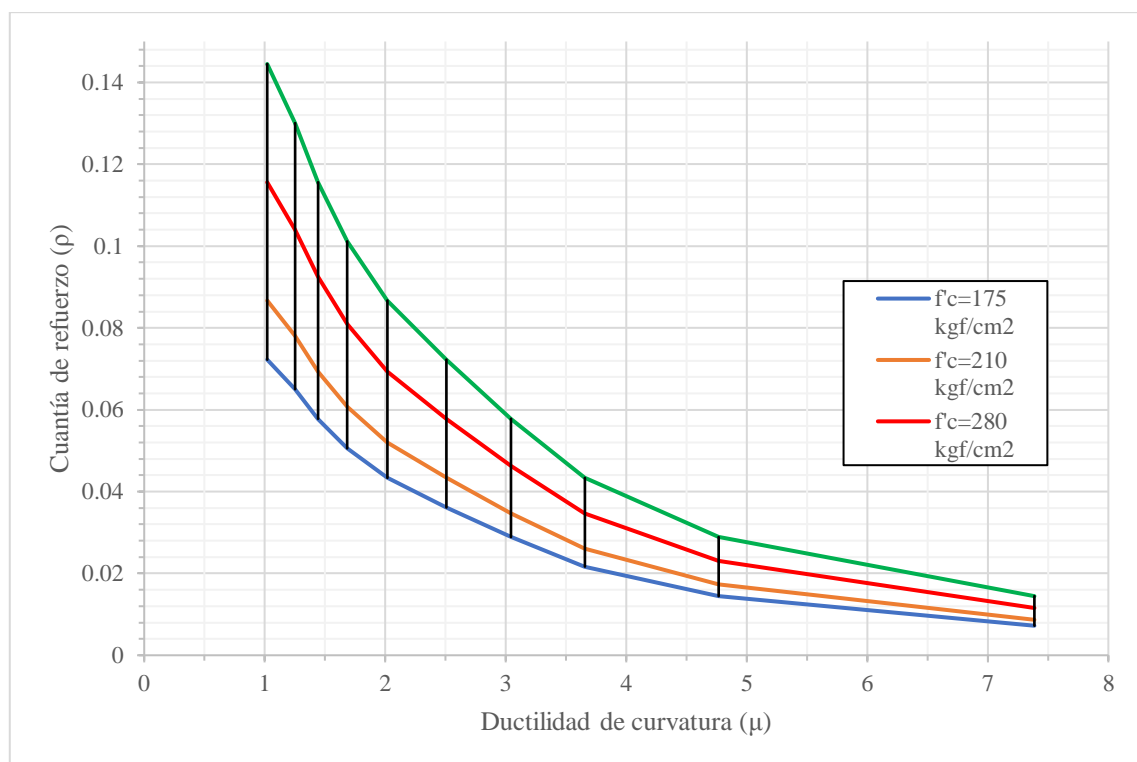
- Evaluación de una sección doblemente reforzada con acero de refuerzo a compresión equivalente al 25 % del acero de refuerzo a tracción.



*Figura 3.26: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función de porcentajes de la cuantía balanceada, con acero de refuerzo a compresión igual al 25% del acero de refuerzo a tracción.*

Como se aprecia en la figura 3.26, se observa que a partir una proporción de  $0.2 \rho_b$  en adelante, así se incrementa la resistencia a la compresión del concreto, la ductilidad se mantiene, es decir que se mantiene el comportamiento descrito en la figura 3.25. Cabe señalar que esto mismo sucede en la figura 3.27, sin embargo, en esta última se observa que dicha condición se cumple desde  $0.1 \rho_b$  en adelante.

- Evaluación de una sección doblemente reforzada con acero de refuerzo a compresión equivalente al 75 % del acero de refuerzo a tracción.



*Figura 3.27: Ductilidad vs cuantía de refuerzo a tracción, evaluación en función de porcentajes de la cuantía balanceada, con acero de refuerzo a compresión igual al 75% del acero de refuerzo a tracción*

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

- Al variar la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, la curva ductilidad vs cuantía de refuerzo se desplaza hacia arriba y a la derecha de las gráficas de ductilidad (ver figura 3.13, 3.14, 3.15, 3.17, 3.18, 3.25, 3.26 y 3.27).
- Se aprecia que a partir una proporción de 0.3 y 0.4 de la cuantía de análisis en adelante, así se incrementa la resistencia a la compresión del concreto, la ductilidad se mantiene, esto se puede identificar a través de las líneas verticales negras mostradas en las figuras 3.13, 3.14, 3.15, 3.17 y 3.18.
- Se aprecia que a partir una proporción de 0.1 y 0.2 de la cuantía de análisis en adelante, así se incrementa la resistencia a la compresión del concreto, la ductilidad se mantiene, esto se puede identificar a través de las líneas verticales negras mostradas en las figuras 3.25, 3.26 y 3.27.
- Se optó por trabajar la presente investigación con un modelo elasto-plástico ideal del acero, esto con la finalidad de desprestigiar el incremento de resistencia del acero después de atravesar la etapa de fluencia.
- Se comprende que la ductilidad puede alcanzar valor como valor mínimo 1, ya que si se alcanza un menor valor ya no se está dando una falla controlada por tracción.
- En el caso de las figuras 3.17 y 3.18, se observa que las curvas determinadas garantizando una falla por tracción tienen la misma tendencia de las obtenidas del análisis de la condición balanceada. Esto se puede apreciar a través de las curvas grises que se ven de fondo en estas gráficas, las cuales representan a la condición balanceada.
- Cuando se evalúan secciones doblemente reforzadas, se observa que en los tres casos mostrados (ver figuras 3.25, 3.26 y 3.27), se describe la misma tendencia en los

resultados, sin embargo, se observa también que conforme se incrementa el porcentaje de acero de refuerzo a compresión, la ductilidad de la sección de estudio se reduce.



## 5. CONCLUSIONES

- La variación de la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto incrementa la ductilidad de una sección bajo la misma cuantía de acero de refuerzo.
- Si se pretende reforzar una sección de concreto armado en función a porcentajes de la cuantía balanceada, se debe verificar los valores de ductilidad obtenidos, ya que a partir del 30% de la cuantía balanceada en adelante sea cual sea la resistencia a la compresión cilíndrica del concreto, la ductilidad obtenida en la sección siempre será la misma.
- A través del modelo de Hognestad se logró trazar la gráfica esfuerzo vs deformación del concreto (figura 3.2), la cual muestra el incremento de la deformación unitaria conforme se incrementa la resistencia del concreto.
- Se observa que conforme se reduce la cuantía de acero de refuerzo, el análisis momento curvatura arroja resultados que desplazan a la curva de ductilidad vs cuantía hacia la derecha, mostrando, además, que a menor sea el área de acero de refuerzo mayor será ductilidad. Sin embargo, este desplazamiento se ve sujeto a un área mínima de refuerzo, la cual actúa como asíntota en la gráfica.
- No es posible que exista un valor de ductilidad menor a 1, ya que este representaría, que la sección ha fallado por compresión, es decir que la fibra a extrema superior de concreto a fallado antes de que el acero de refuerzo inferior haya alcanzado la fluencia.
- Se observa que si se eligen cuantías de acero refuerzo menores a la cuantía balanceada se garantiza una falla controlada por tracción, lo cual es de vital importancia en el diseño y detallamiento estructural de una edificación de concreto armado, ya que esto evitara la pérdida de estabilidad.

- Se observa que sea cual sea el área de acero de refuerzo utilizada para el análisis momento curvatura, los resultados siempre describirán la misma tendencia, dependiendo su variación de las características mecánicas de los materiales (concreto y acero de refuerzo).
- Se observa que, al analizar secciones doblemente reforzadas, conforme la cantidad de acero superior se incrementa, la ductilidad de la sección disminuye. Esto puede apreciarse en las figuras 3.25, 3.26 y 3.27.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Gioncu, V., & Mazzolani, F. (2002). *Ductility of Seismic Resistant Steel Structures*. New York: Spon Press.
- Hognestad, E. (1951). *A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members*. Illinois, United States of America: University of Illinois Engineering Experiment Station.
- Mazzolani, F. M., & Piluso, V. (2004). *Theory and Desing of Seismic Resistant Steel Frames*. London: England.
- Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento; Construcción, Servicio Nacional de Capacitación para la Industria de la. (2018). *NORMA E.030 DISEÑO SISMORRESISTENTE*. Lima, Perú.
- Moroni, M. O., Astroza, M., & Gómez, J. (1992). Seismic force reduction factor for masonry building. *Eathquake Engineering, Tenth World Conference*.
- Palazzo, B., & Siano, F. (1992). A new proposal for a structural reduction factor formulation. *Earthquake Engineering, Tenth World Conference*.
- Park, R., & Paulay, T. (1983). *Estructuras de Concreto Reforzado*. México D. F.: Editorial Limusa.
- Ruiz-Garcia, J., & Miranda, E. (2003). Evaluación de los factores de reducción de resistencia por ductilidad para estructuras de mamposteria cimentadas en terreno firme. *Revista de Ingeniería Sísmica N° 69*, 1-23.